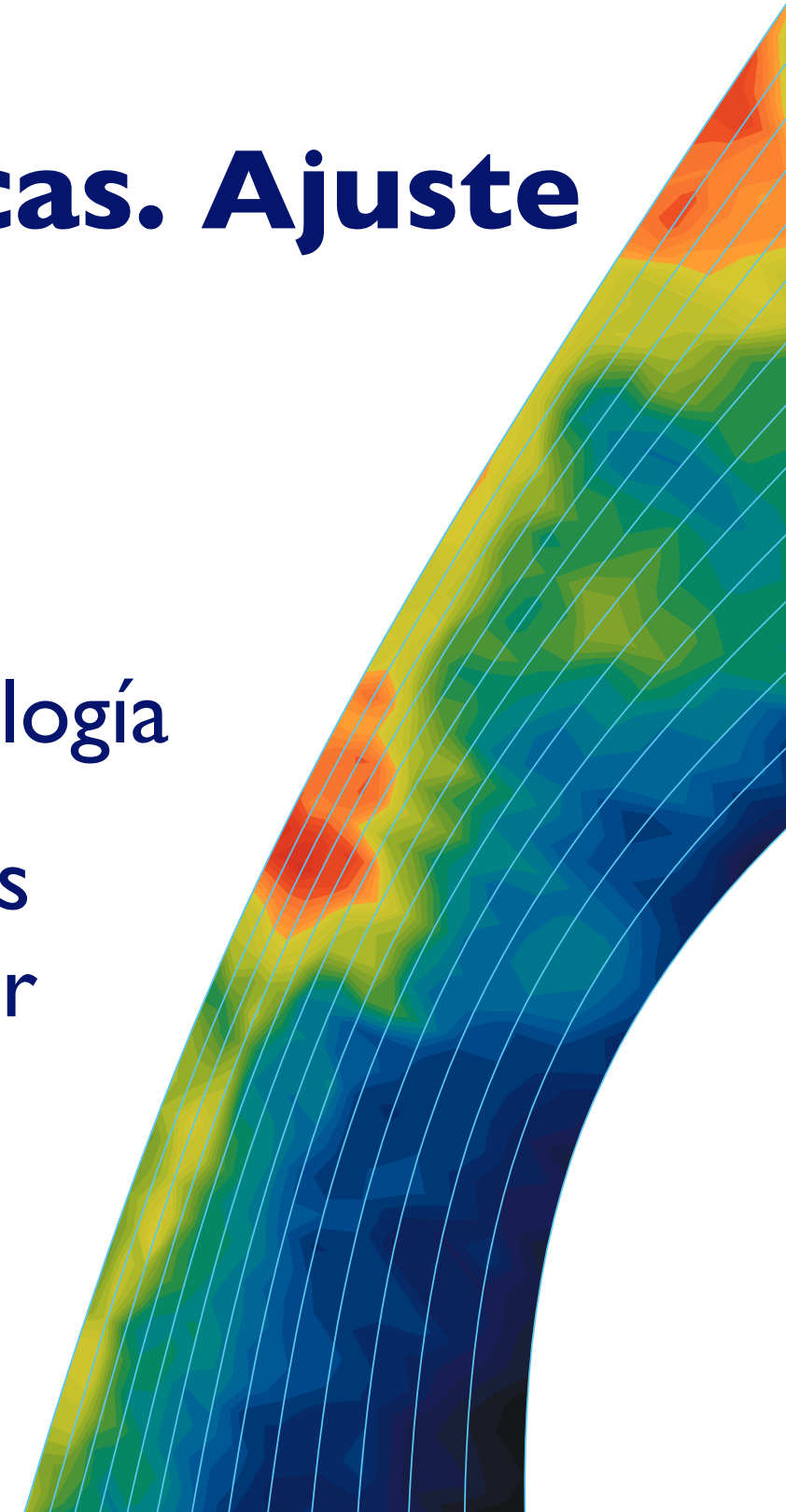


Clase 2: Variables asimétricas. Ajuste Lognormal

Métodos estadísticos en Hidrología

Prof. Daniel Sempere Torres

Prof. Marc Berenguer Ferrer



Bibliografia de referència per Hidrologia:

Hidrología superficial y Subterránea. F. Javier Sánchez San Román
ISBN 978-1975606602 ED. Createspace Independent.

<https://www.amazon.es/Hidrolog%C3%ADa-Superficial-Subterránea-Javier-Sánchez/dp/1975606604/>

Pagina web de l'autor

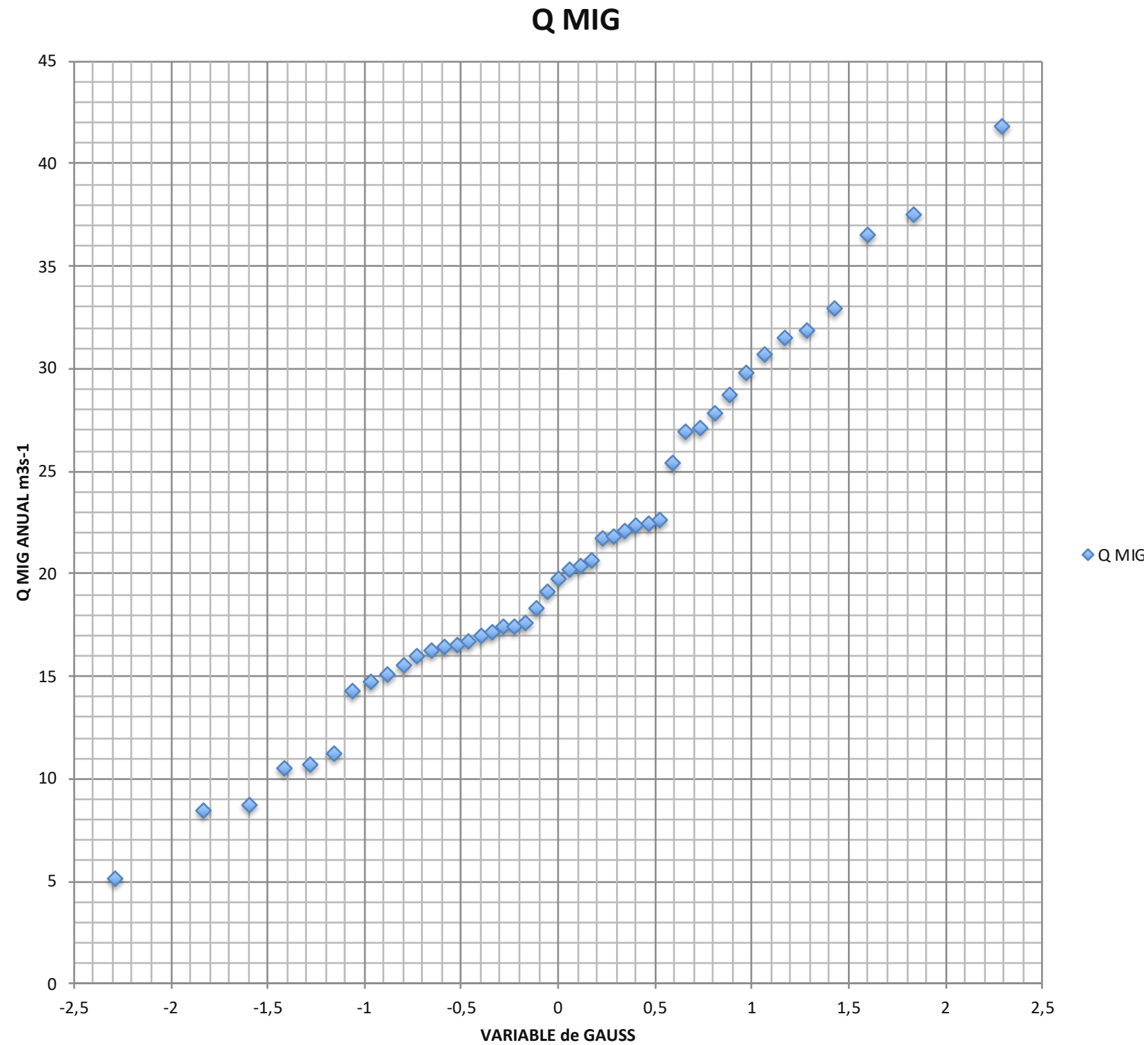
<http://hidrologia.usal.es>

Notes d'Hidrologia estadística de l'autor:

http://hidrologia.usal.es/temas/calculos_esta.pdf

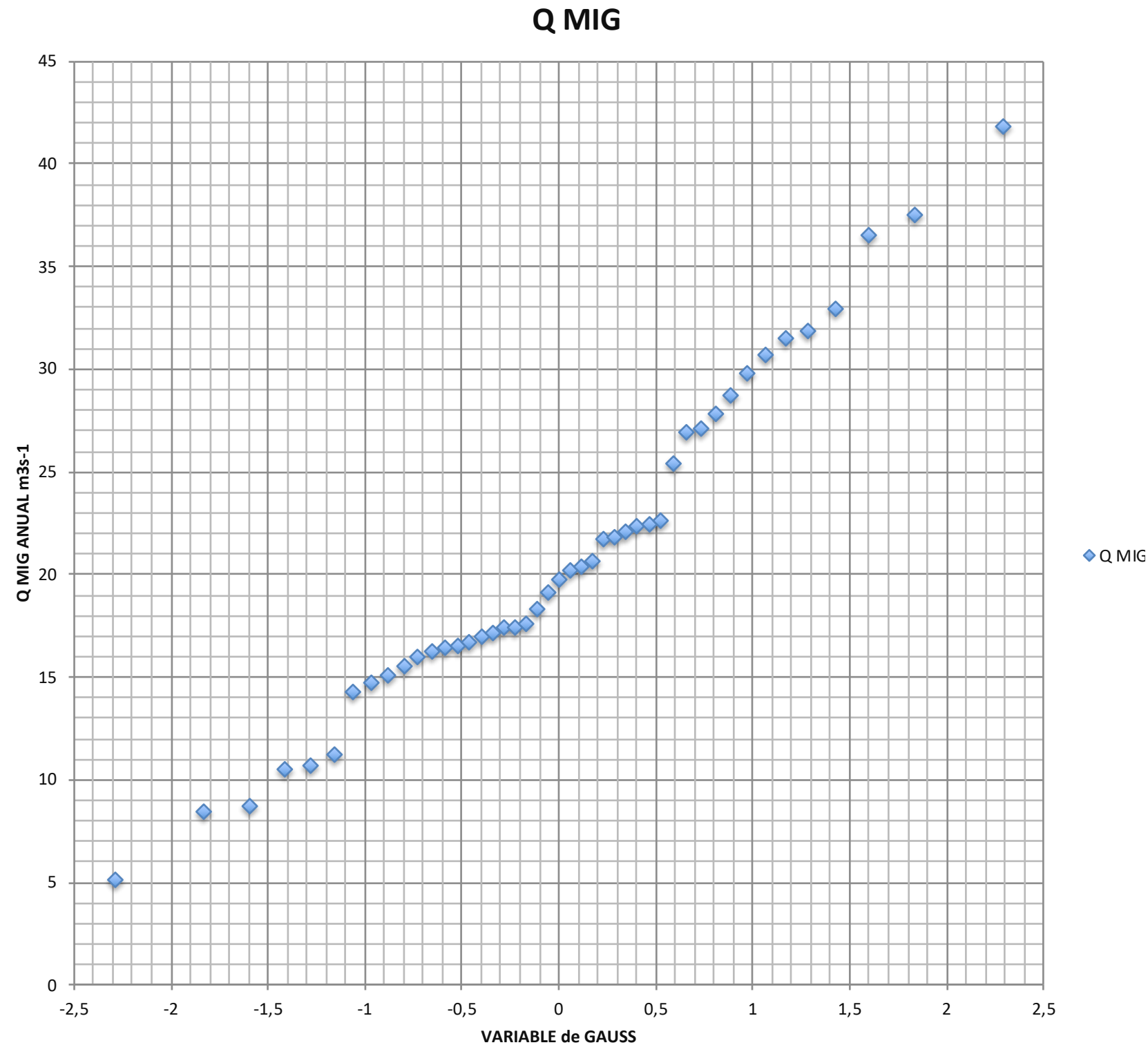
<http://hidrologia.usal.es/Complementos/estadistica/Graficos-de-probabilidad.pdf>

CORRECCIO EXERCICI



AJUST PEL METODE DE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$



AJUST PEL METODE DE DELS MOMENTS

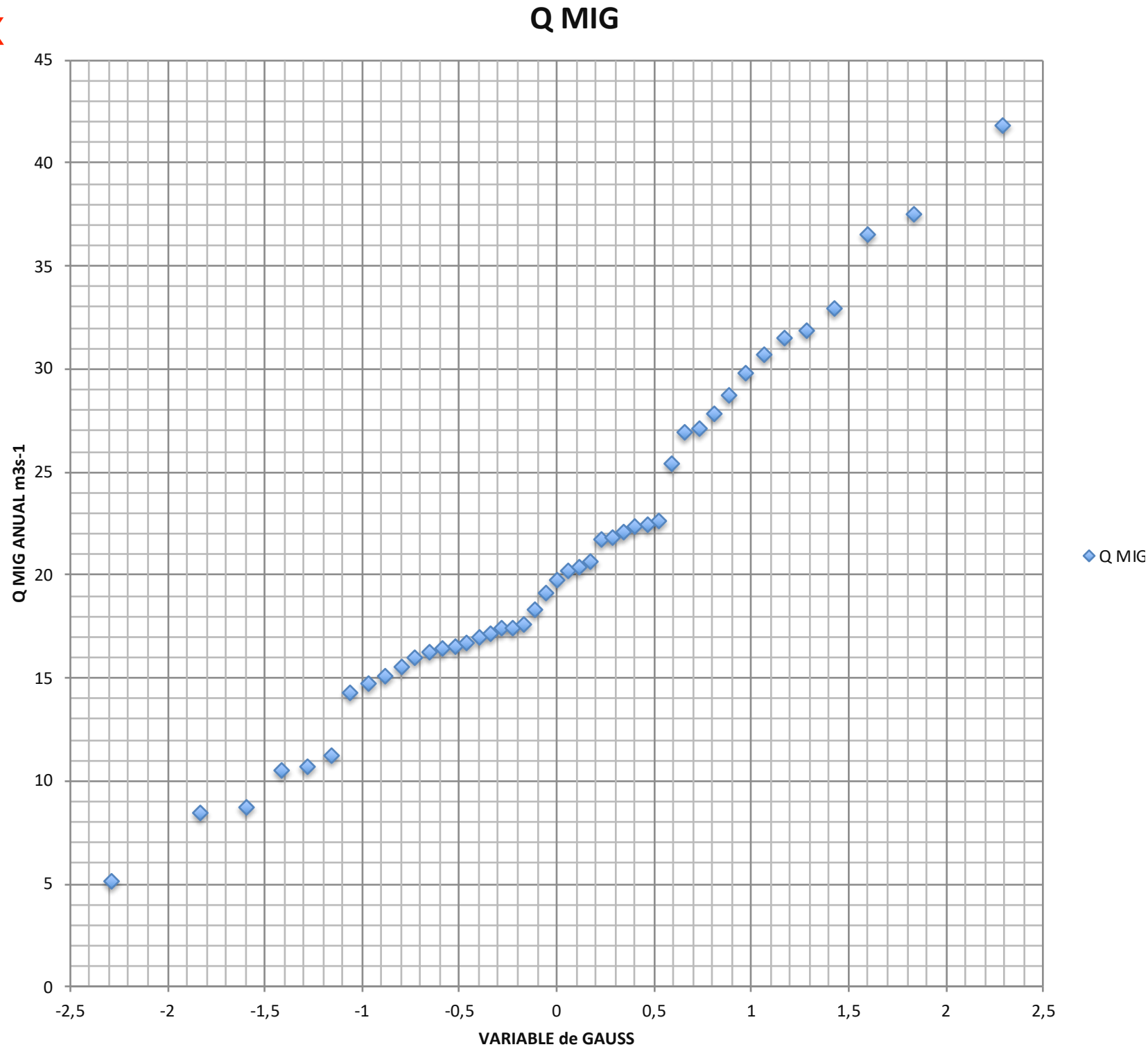
$$X = \bar{X} + u * S$$

Max

Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0



X (variable de Gauss U)

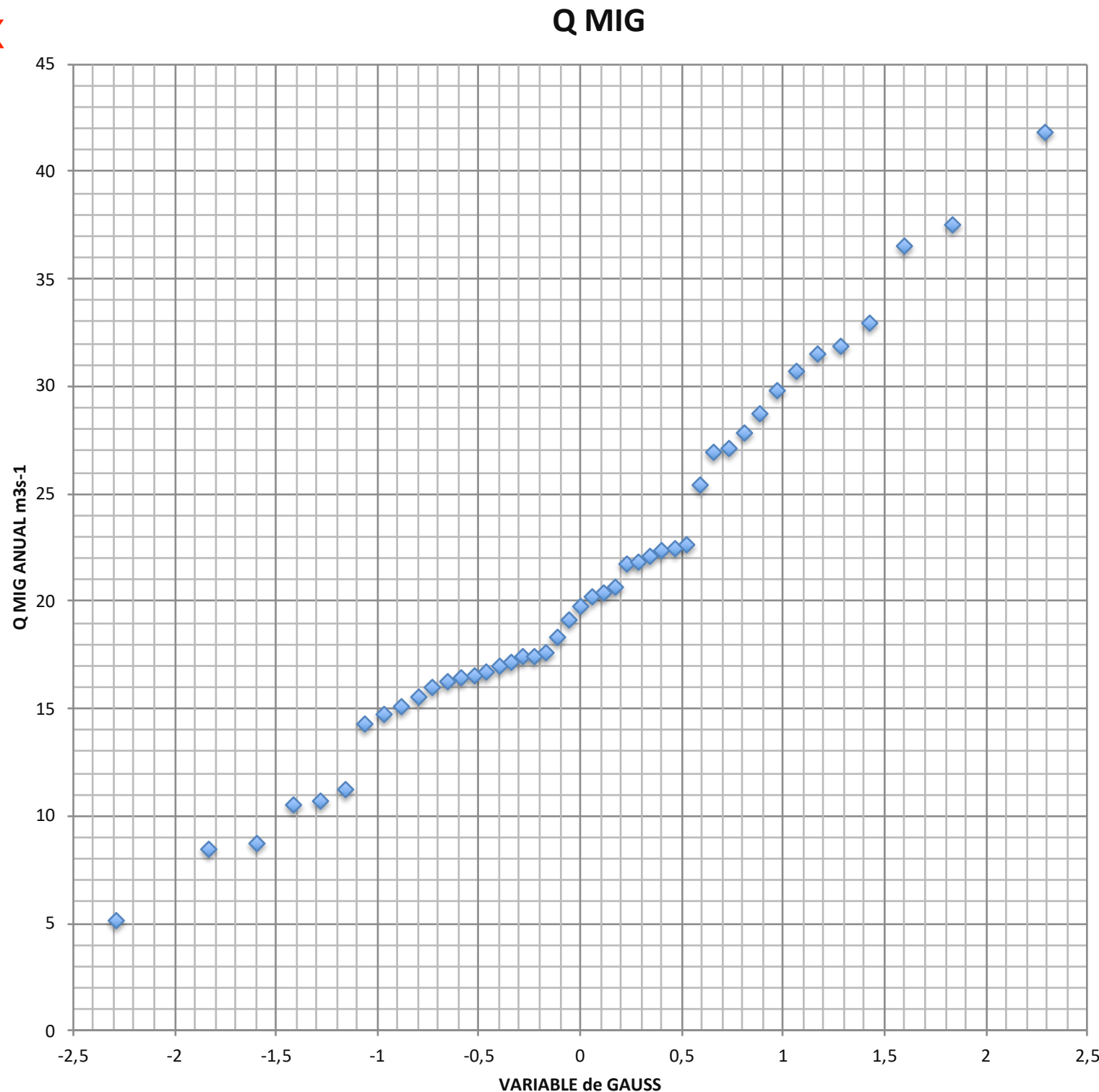
AJUST PEL METODE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$

Max
Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0



Si la Variable és Gaussiana, els punts han d'estar alineats formant una recta en paper de Gauss

Si no és així, rebutjarem la hipotesí de que segueix una distribució Normal i haurem de proposar una altre distribució

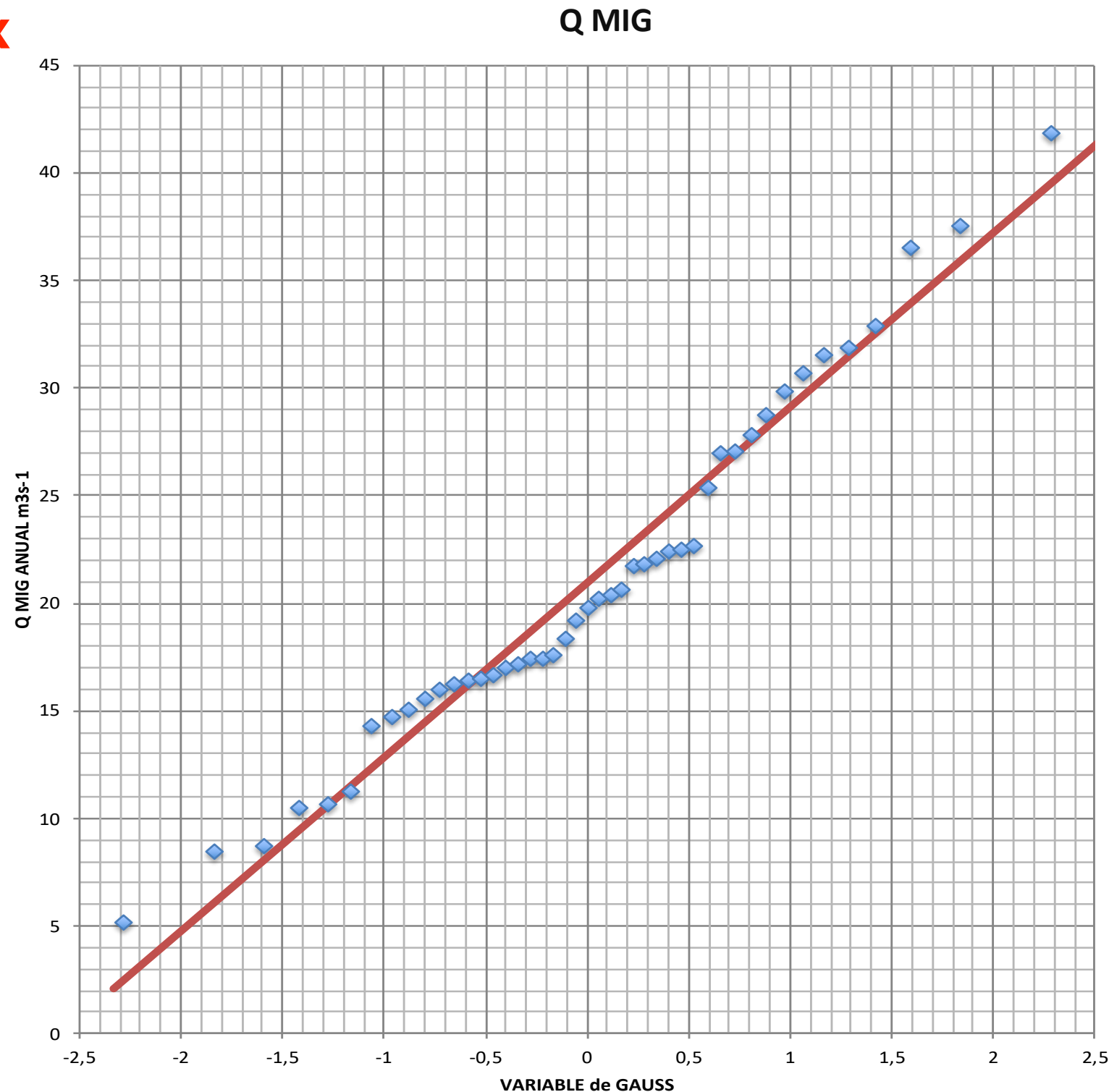
AJUST PEL METODE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$

Max
Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0



X (variable de Gauss U)

Si la Variable és Gaussiana, els punts han d'estar alineats formant una recta en paper de Gauss

Si no és així, rebutjarem la hipotesí de que segueix una distribució Normal i haurem de proposar una altre distribució

AJUST PEL METODE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$

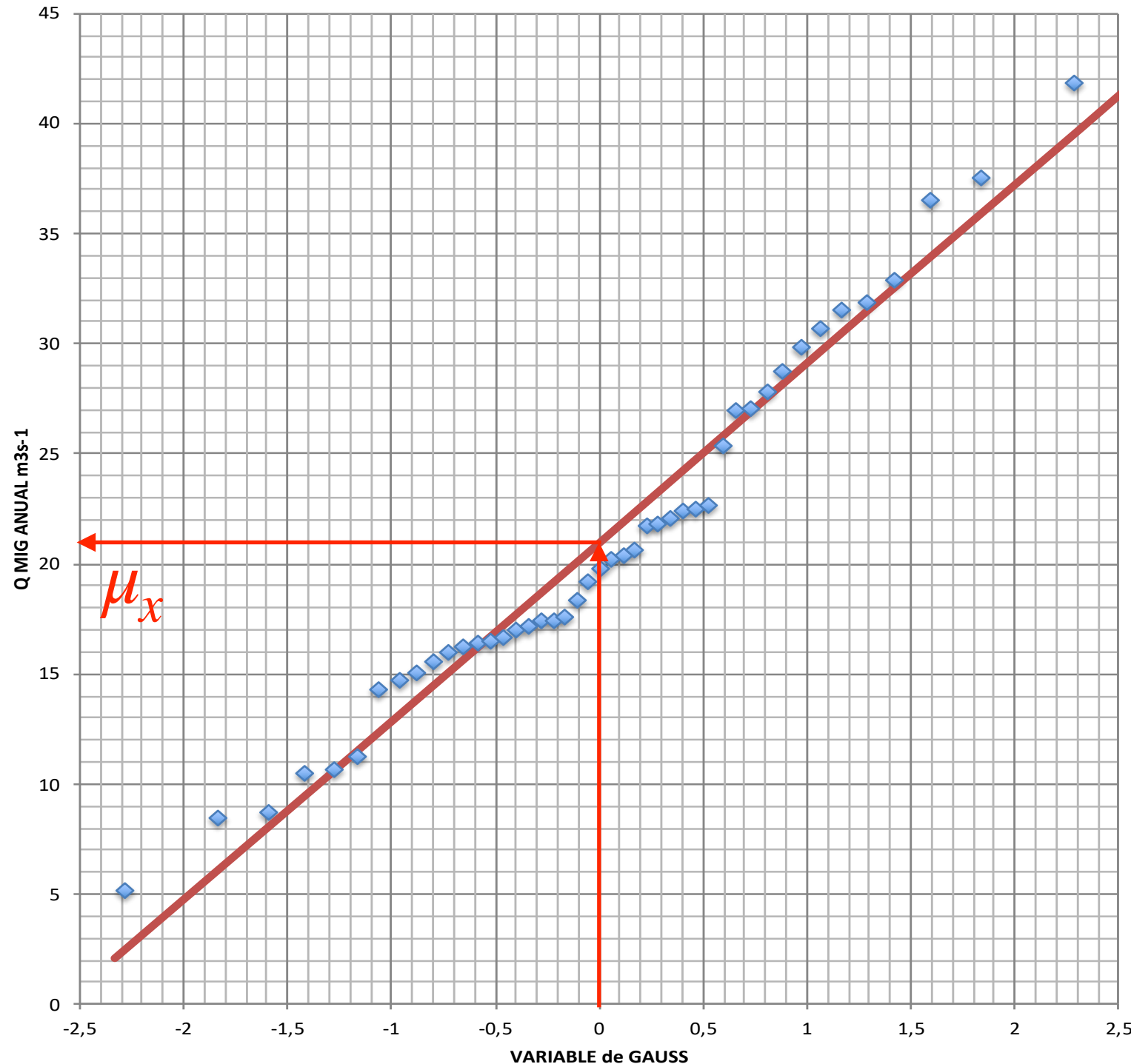
Max

Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0

Q MIG



X (variable de Gauss U)

Si la Variable és Gaussiana, els punts han d'estar alineats formant una recta en paper de Gauss

Si no és així, rebutjarem la hipotesí de que segueix una distribució Normal i haurem de proposar una altre distribució

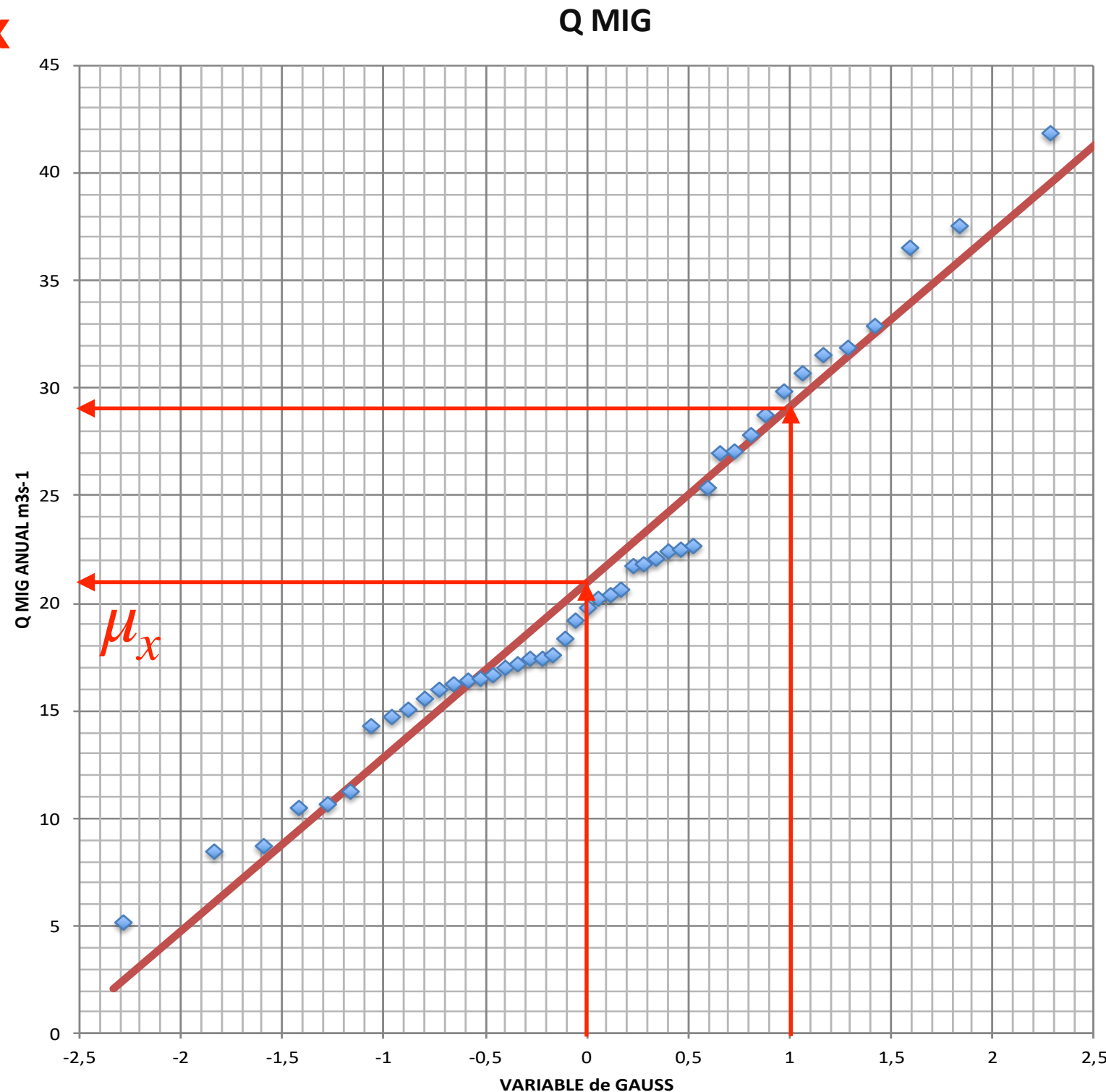
AJUST PEL METODE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$

Max
Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0



X (variable de Gauss U)

Si la Variable és Gaussiana, els punts han d'estar alineats formant una recta en paper de Gauss

Si no és així, rebutjarem la hipotesí de que segueix una distribució Normal i haurem de proposar una altre distribució

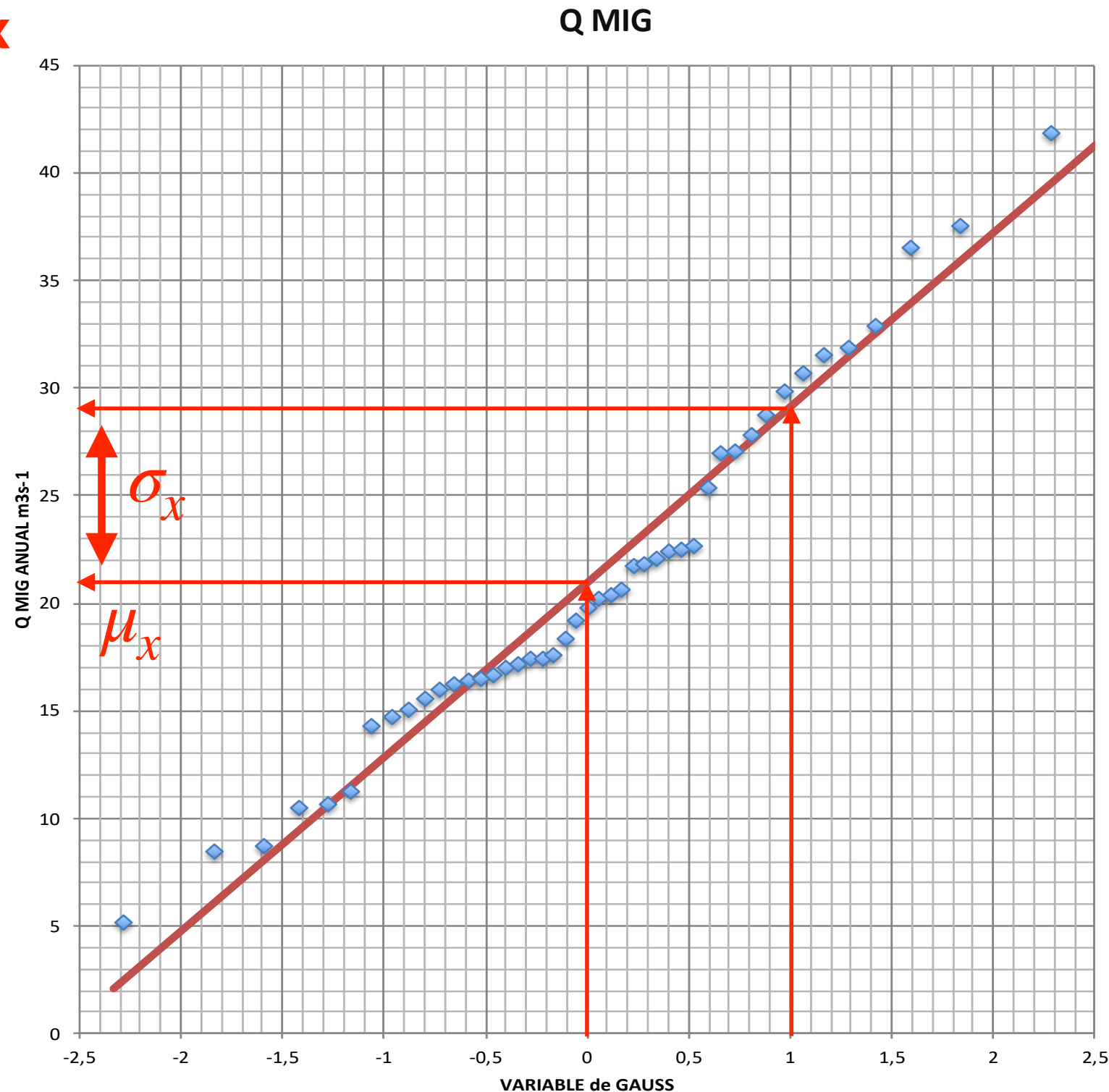
AJUST PEL METODE DELS MOMENTS

$$X = \bar{X} + u * S$$

Max
Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0



Si la Variable és Gaussiana, els punts han d'estar alineats formant una recta en paper de Gauss

Si no és així, rebutjarem la hipotesí de que segueix una distribució Normal i haurem de proposar una altre distribució

AJUST PEL METODE DE DELS MOMENTS

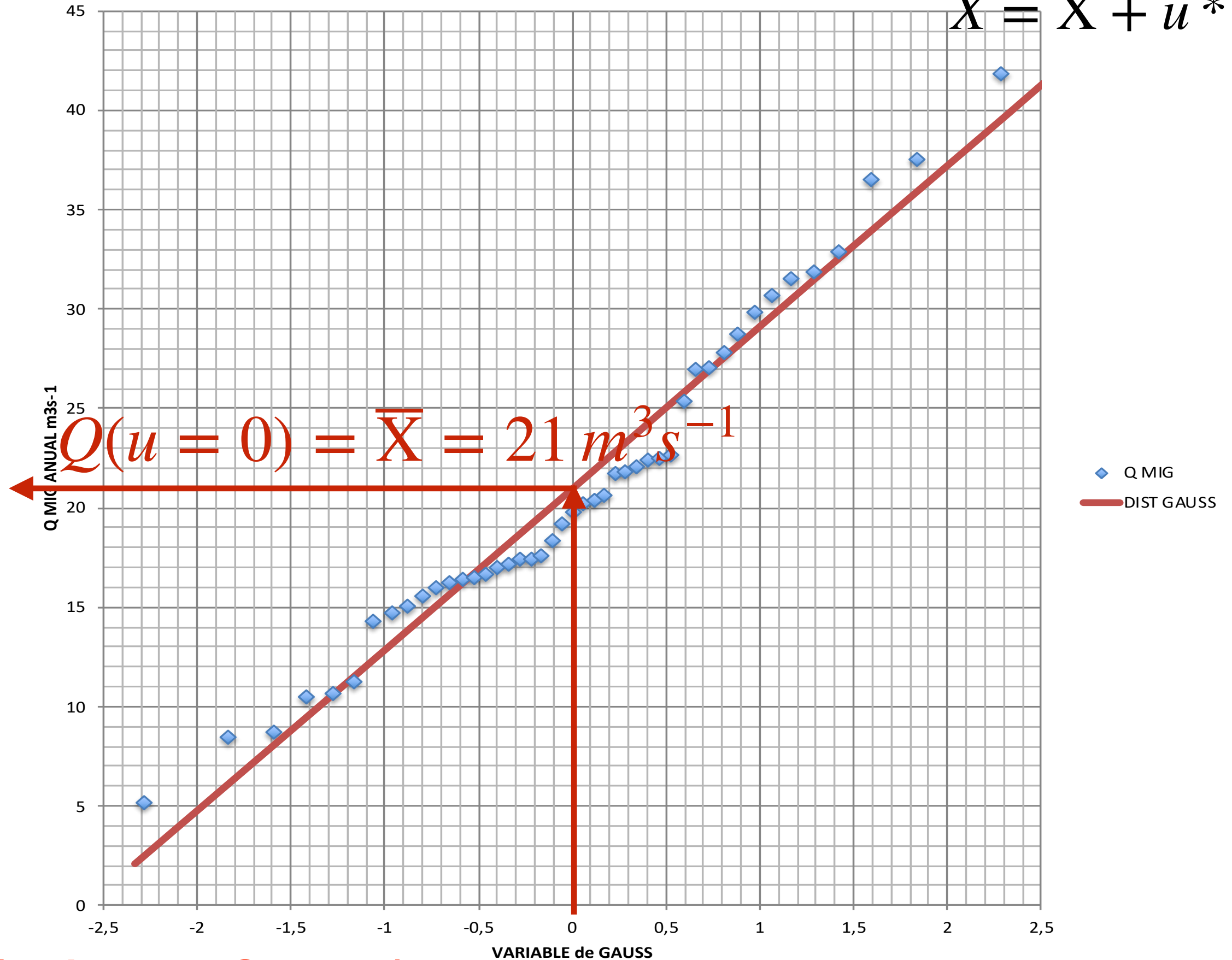
$$X = \bar{X} + u * S$$

Max
Q

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0

X (variable de Gauss U)



AJUST PEL METODE DE DELS MOMENTS

Max
Q

$$X = \bar{X} + u * S$$

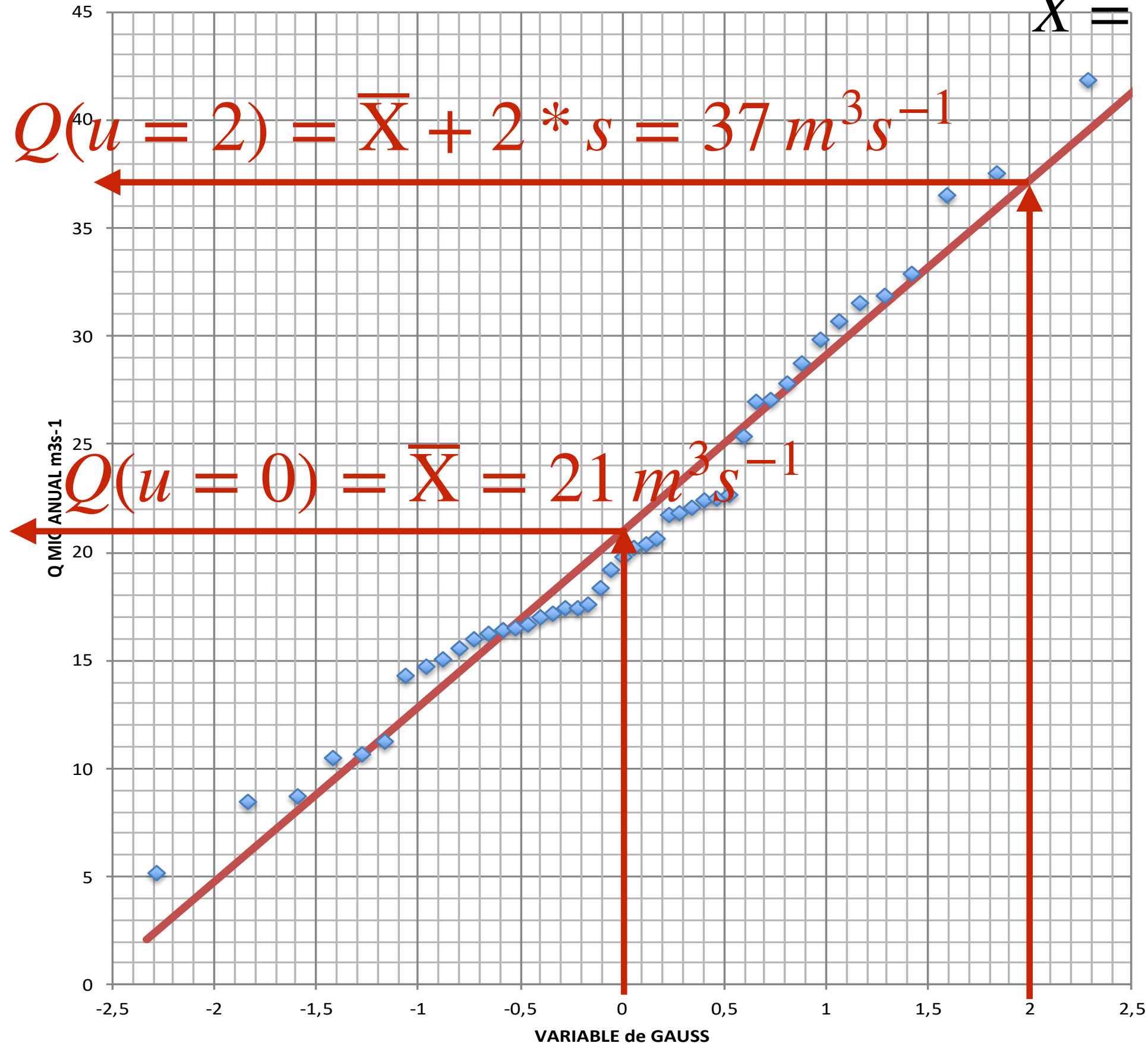
$$Q(u = 2) = \bar{X} + 2 * s = 37 m^3 s^{-1}$$

$$Q(u = 0) = \bar{X} = 21 m^3 s^{-1}$$

Y = Q mig anual en m³s⁻¹

0

X (variable de Gauss U)

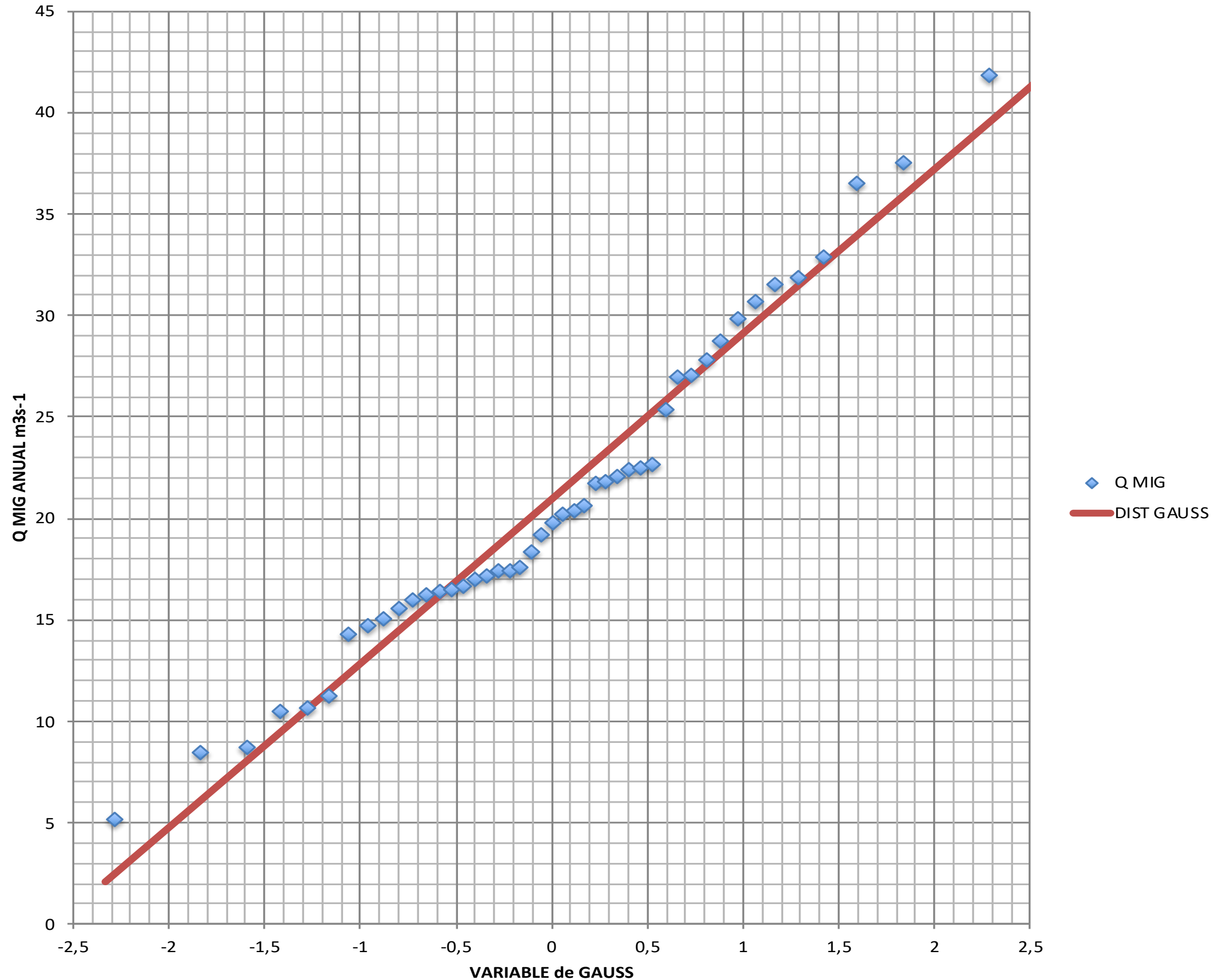


ESTIMACIO DE PROBABILITATS

A partir del resultat de l'anàlisi gràfica responeu:

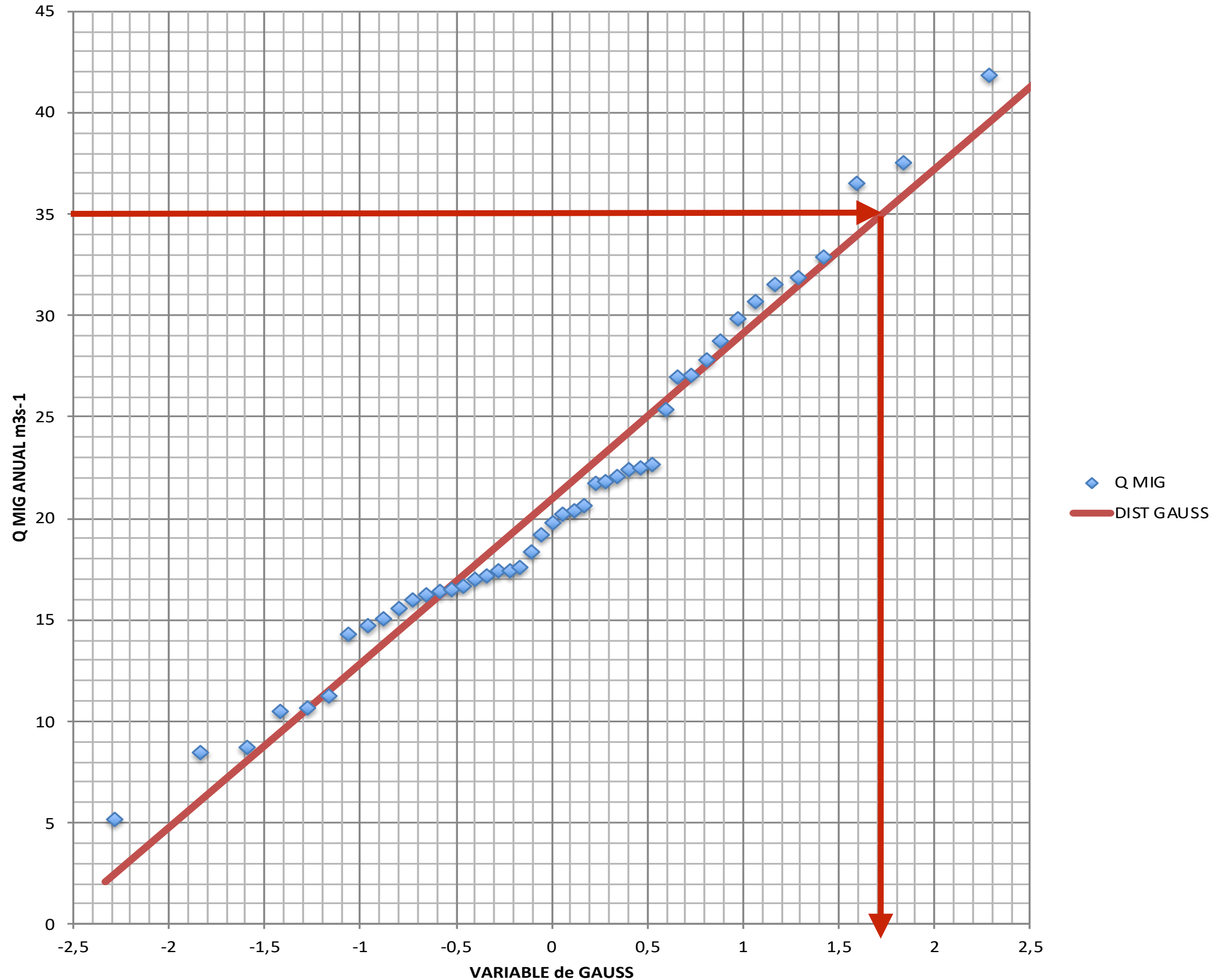
- a) Penseu que la sèrie de dades segueix la funció de distribució de probabilitat de Gauss? Per què?
- b) Quin serà el valor de probabilitat de que la variable sigui **més petita o igual a $35 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$**
- c) Quin serà el valor de probabilitat de que la variable sigui **més gran que $42 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$** ?
- d) Quin és el valor de la variable que té probabilitat d'excedència **($P[X > \text{valor}]$) igual al 84%**

ESTIMACIO DE PROBABILITATS



X (variable de Gauss U)

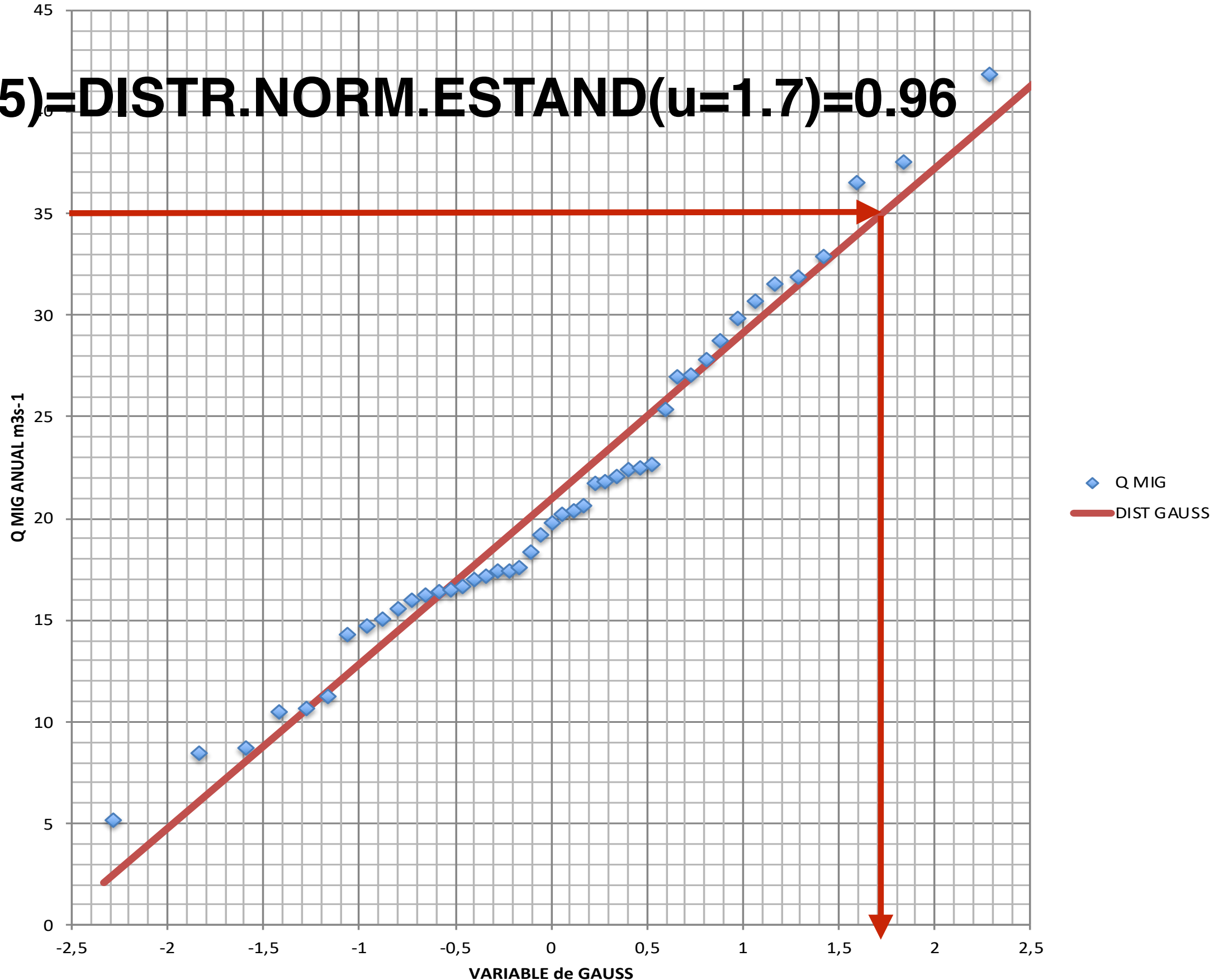
ESTIMACIO DE PROBABILITATS



ESTIMACIO DE PROBABILITATS

$$F(X \leq 35) = \text{DISTR.NORM.ESTAND}(u=1.7) = 0.96$$

35 m³ s⁻¹

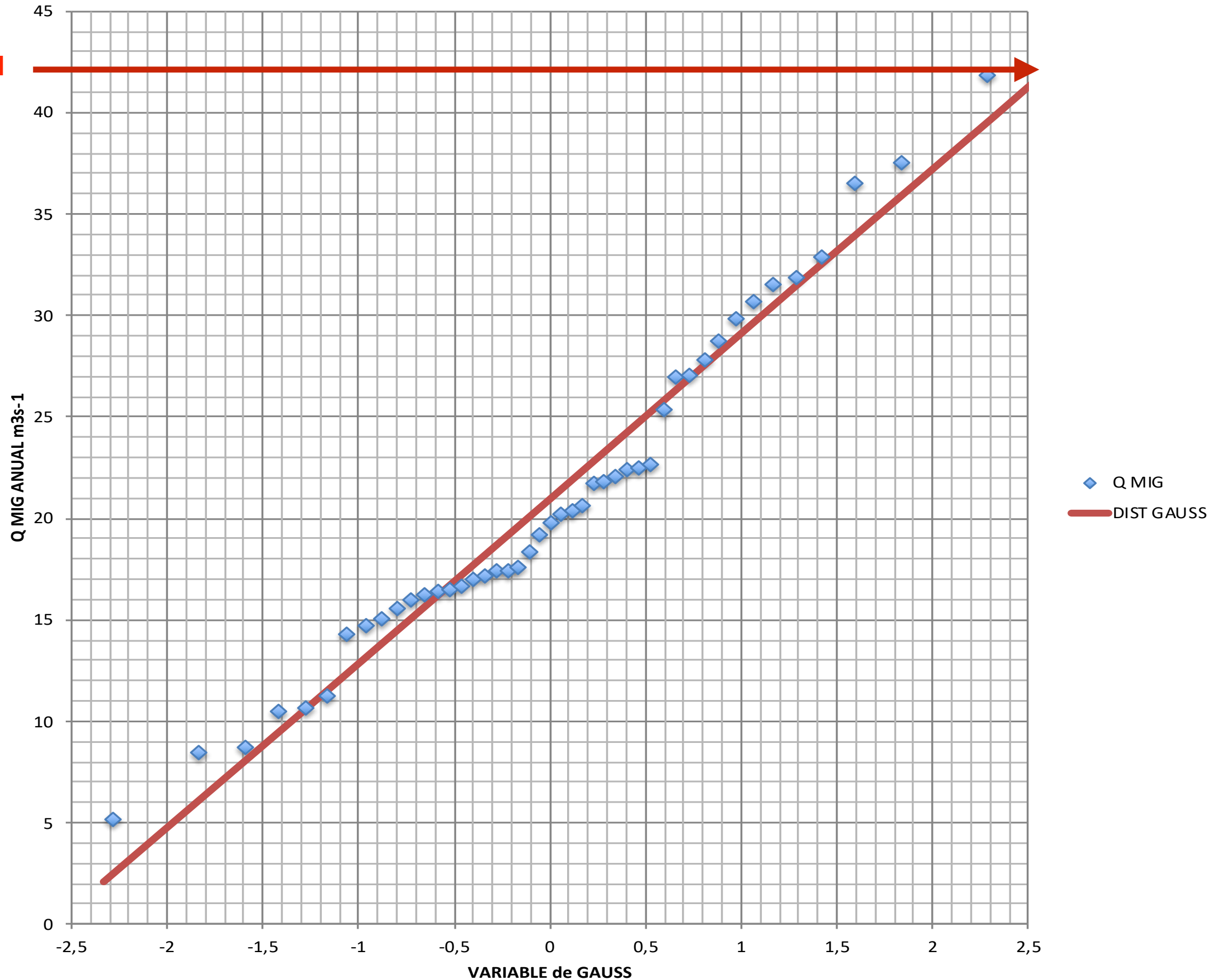


X (variable de Gauss U)

U=1.7

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

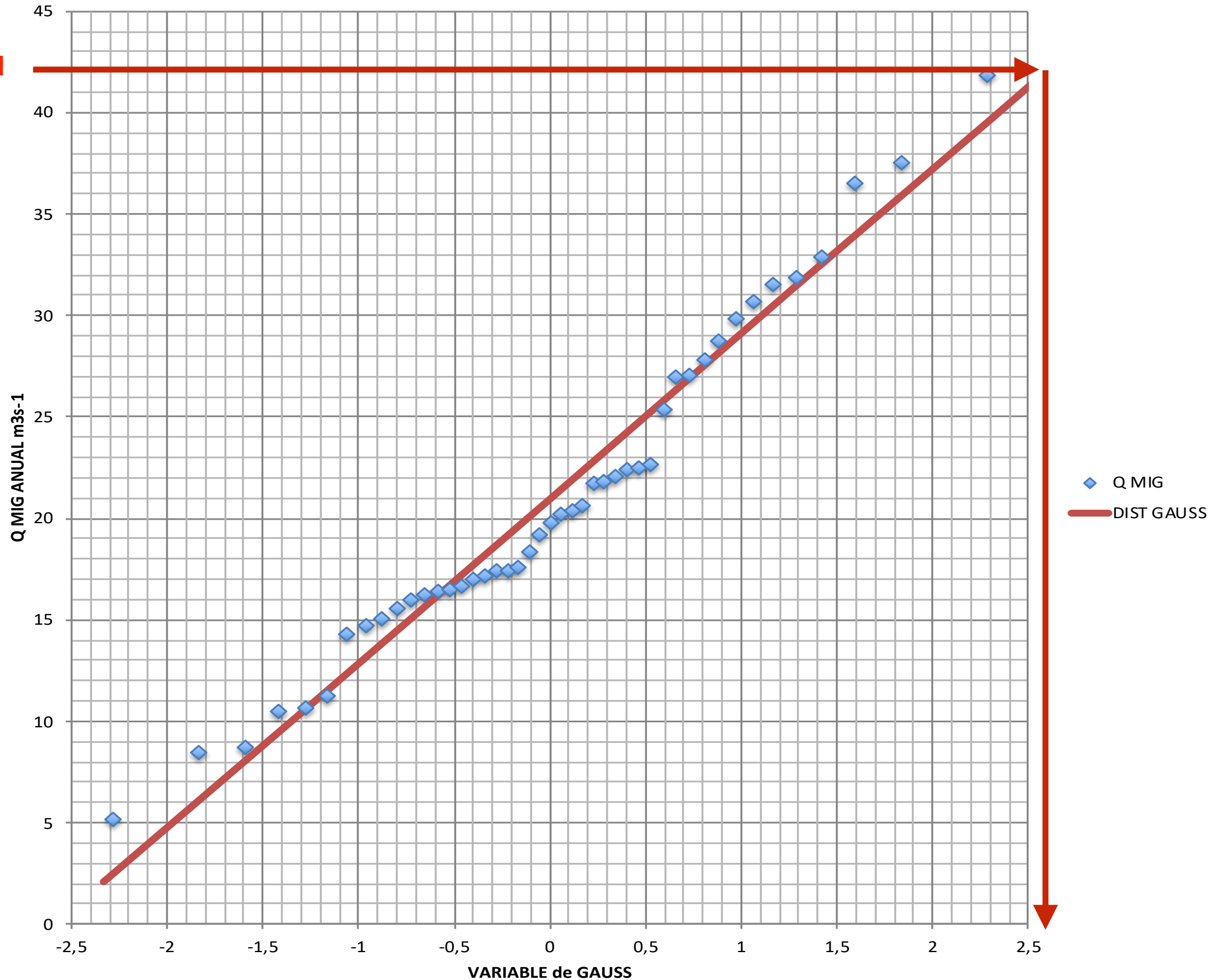
42 m³ s⁻¹



X (variable de Gauss U)

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

42 m³ s⁻¹



X (variable de Gauss U)

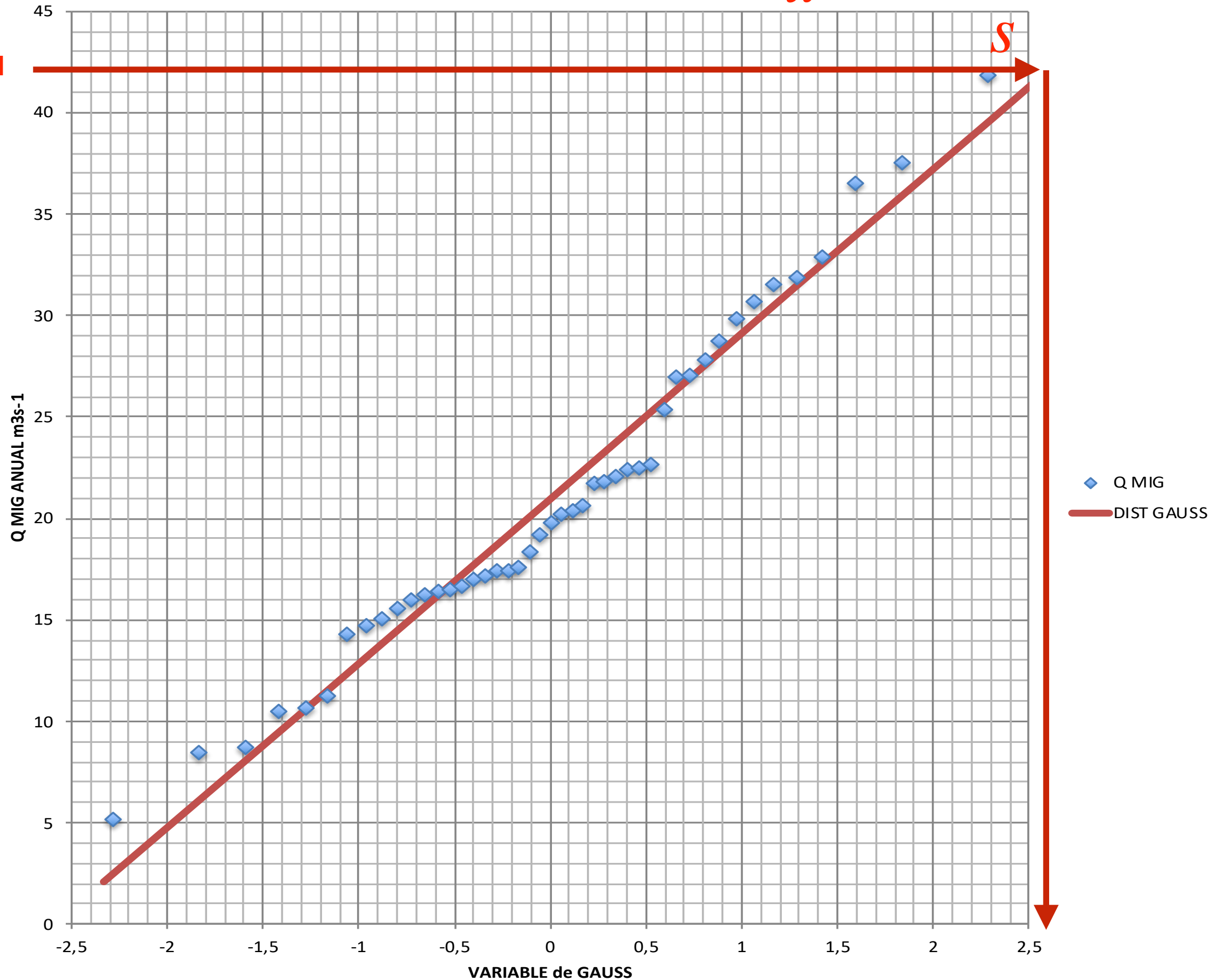
U=2.6

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

$$u = \frac{42 - \bar{X}}{s}$$



42 m³ s⁻¹



X (variable de Gauss U)

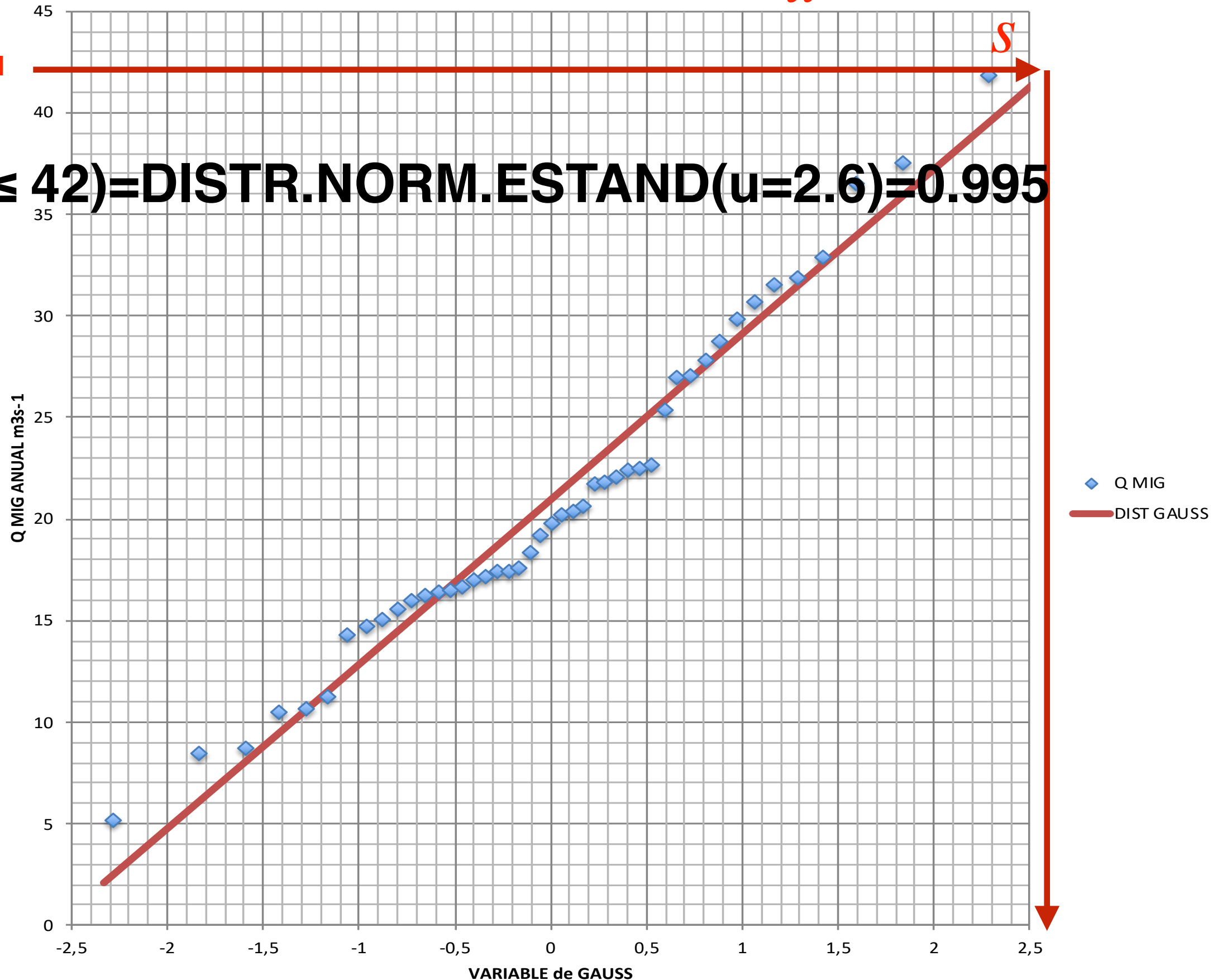
U=2.6

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

$$u = \frac{42 - \bar{X}}{s}$$

42 m³ s⁻¹

$$F(X \leq 42) = \text{DISTR.NORM.ESTAND}(u=2.6) = 0.995$$



X (variable de Gauss U)

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

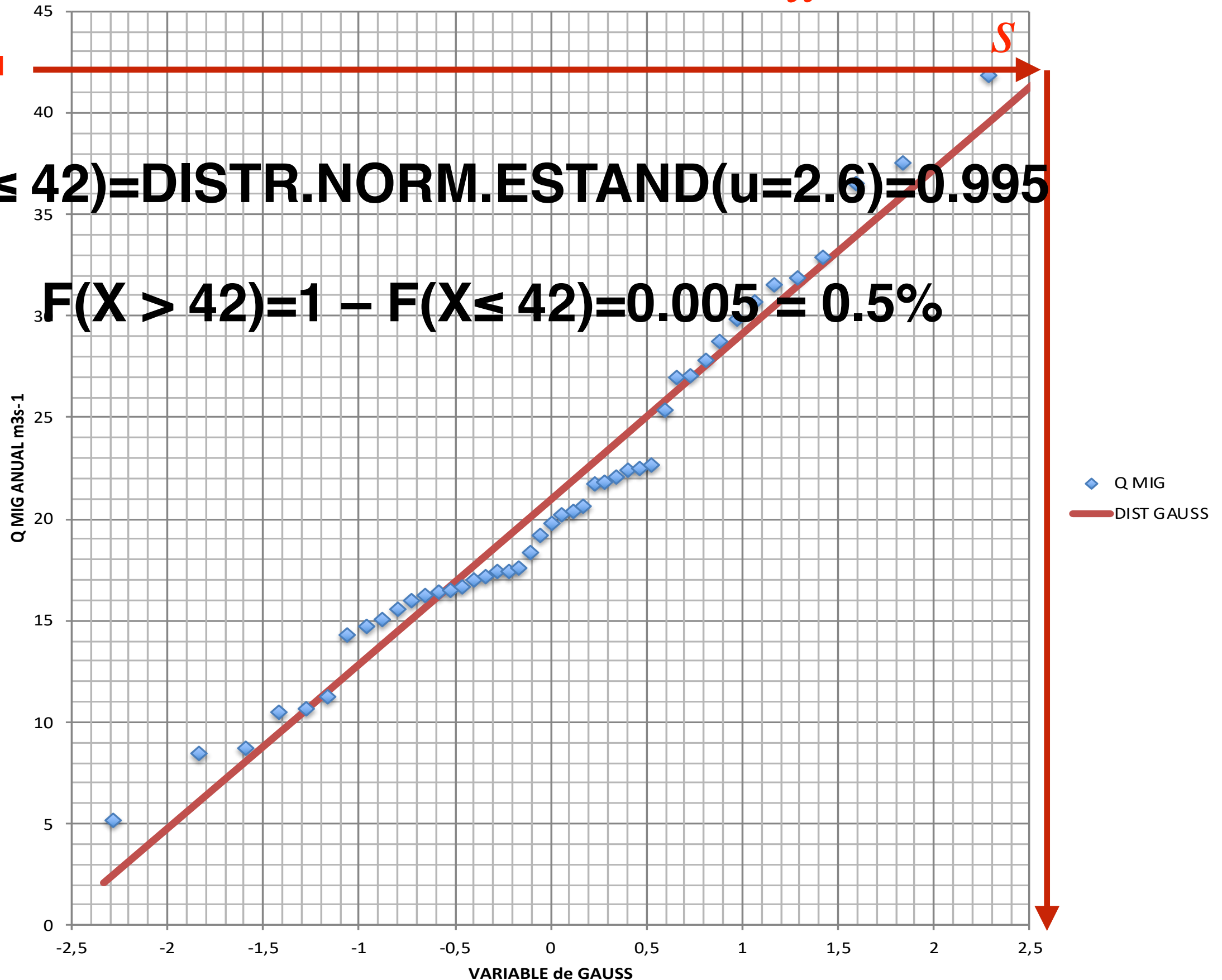
$$u = \frac{42 - \bar{X}}{s}$$



42 m³ s⁻¹

$$F(X \leq 42) = \text{DISTR.NORM.ESTAND}(u=2.6) = 0.995$$

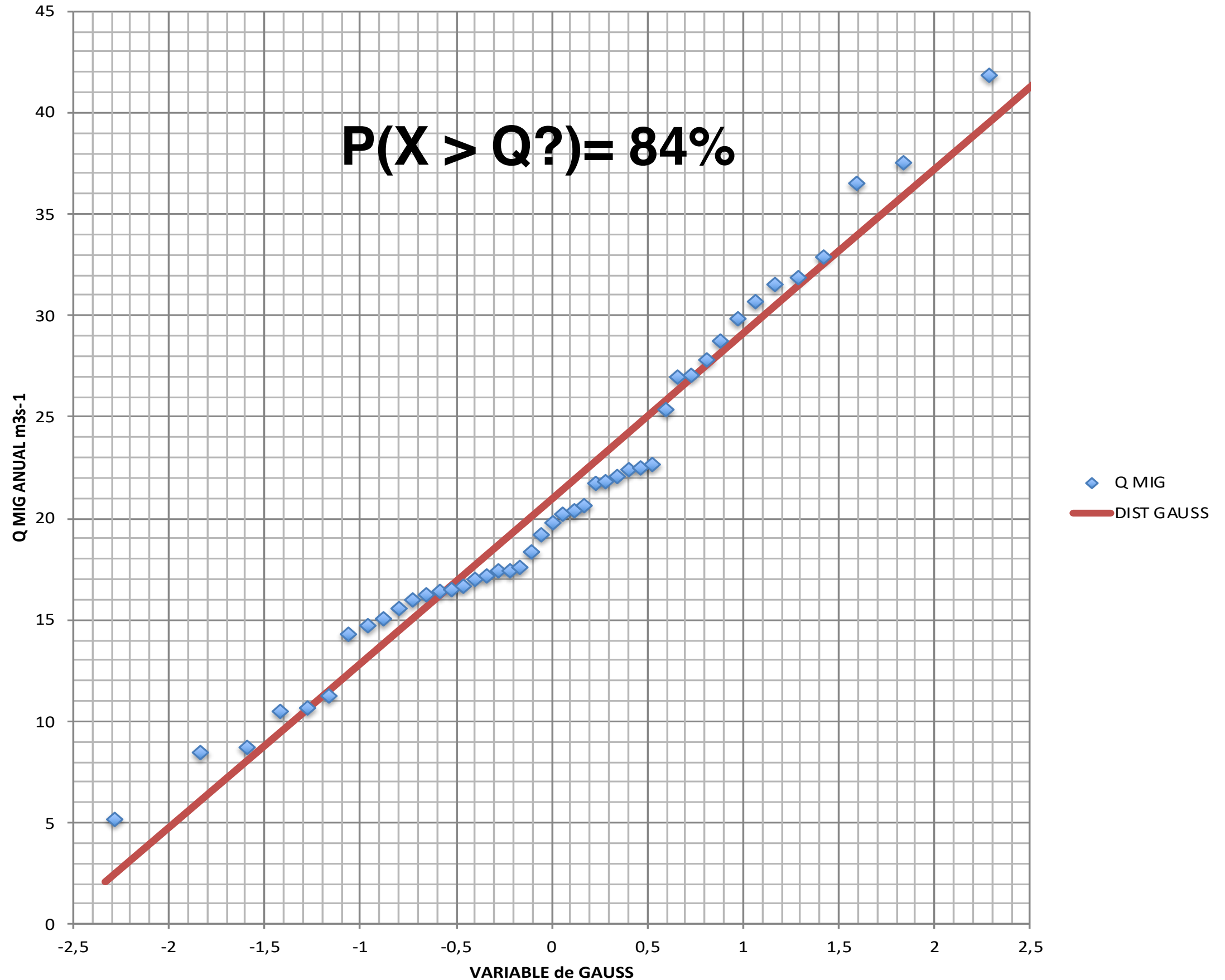
$$F(X > 42) = 1 - F(X \leq 42) = 0.005 = 0.5\%$$



X (variable de Gauss U)

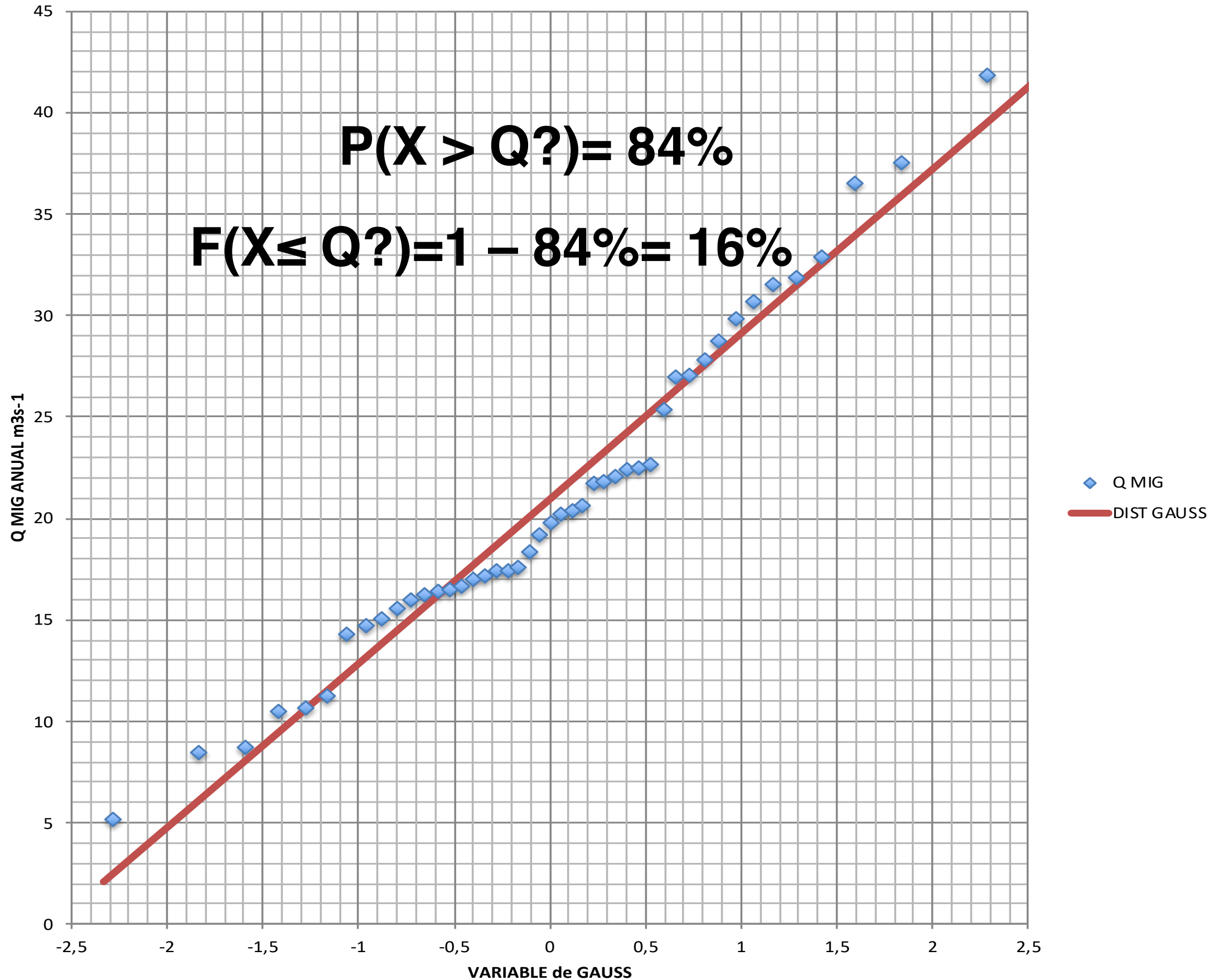
U=2.6

ESTIMACIO DE PROBABILITATS



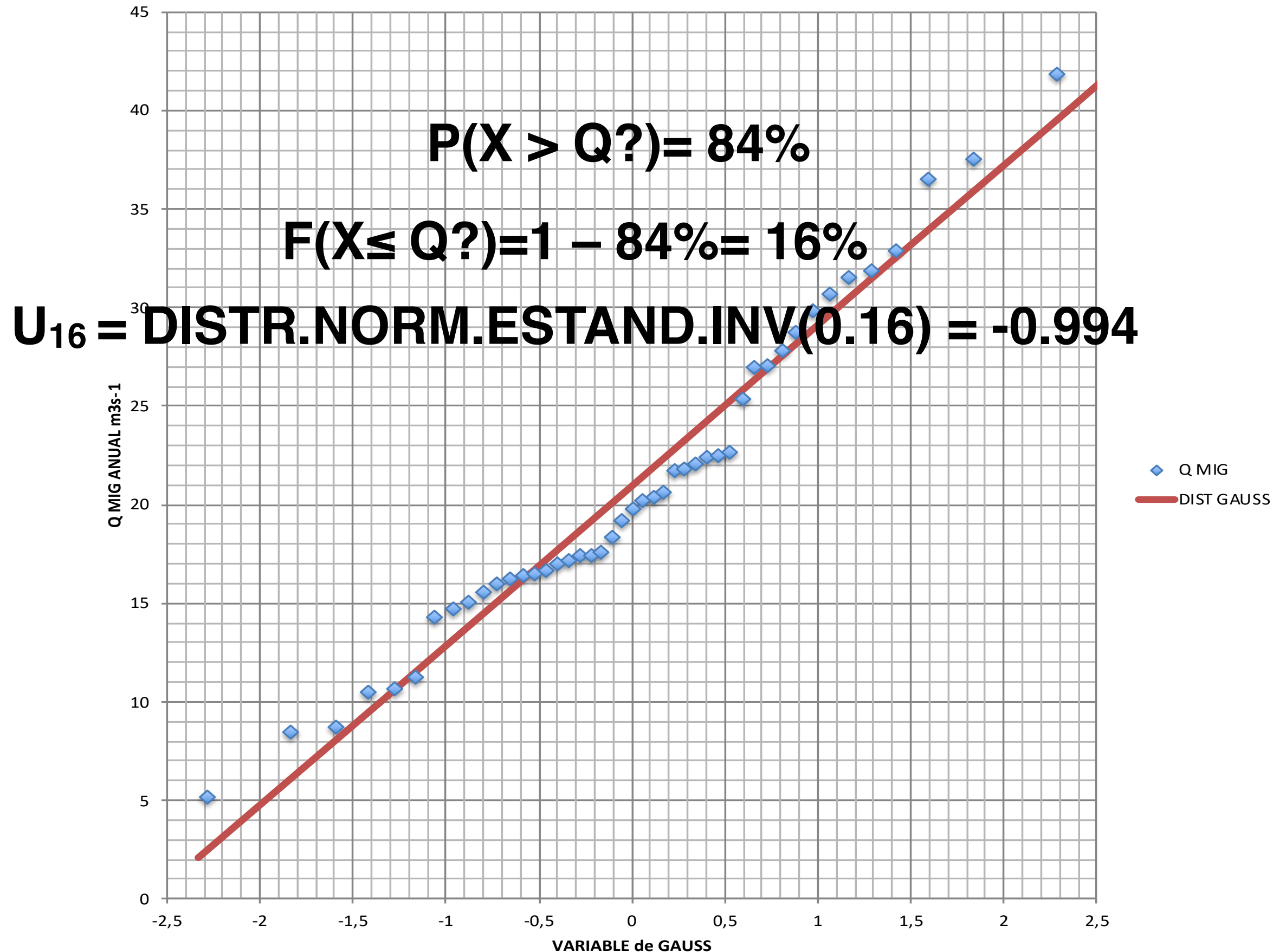
X (variable de Gauss U)

ESTIMACIO DE PROBABILITATS



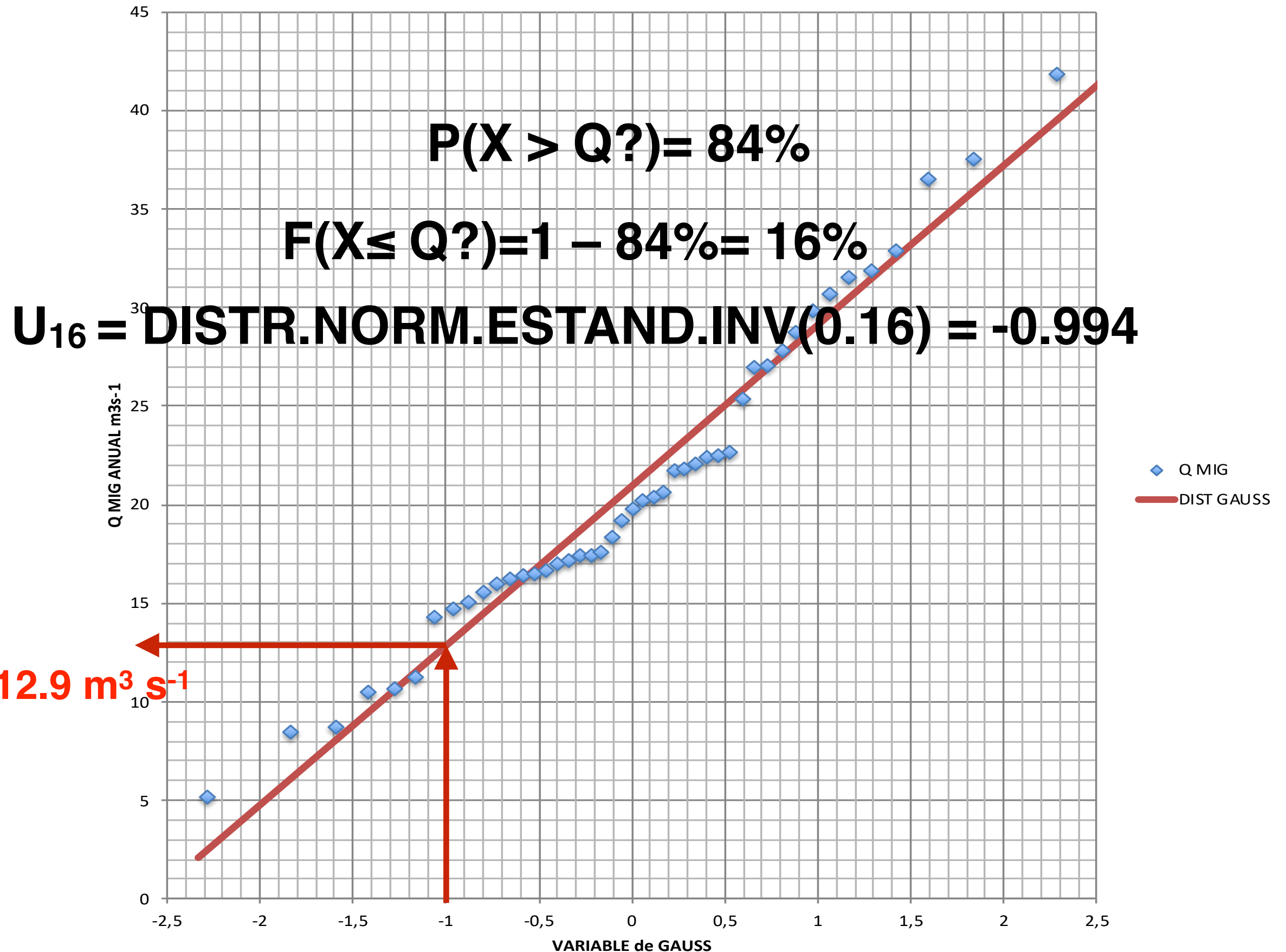
X (variable de Gauss U)

ESTIMACIO DE PROBABILITATS



X (variable de Gauss U)

ESTIMACIO DE PROBABILITATS

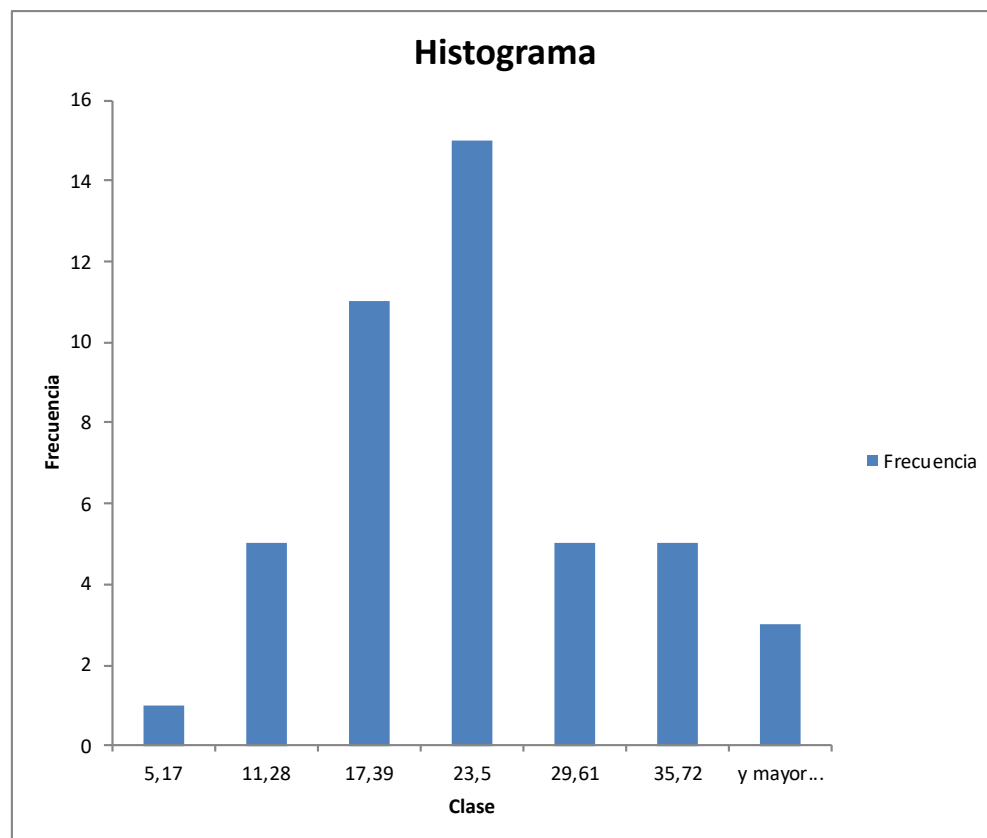


ES o no ES? => BONDAD DEL AJUSTE

Test χ^2

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

La Desviación entre las frecuencias observadas y las estimadas en k clases por la función de densidad de probabilidad sigue una función de distribución χ^2

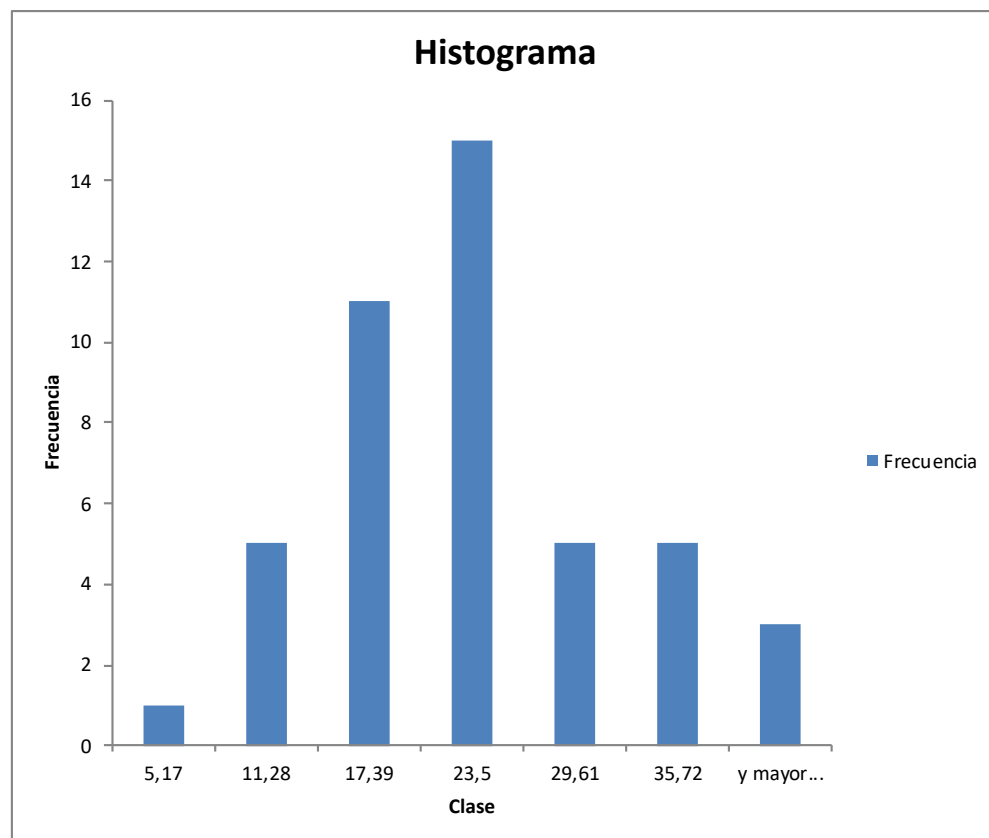


ES o no ES? => BONDAD DEL AJUSTE

Test χ^2

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

La Desviación entre las frecuencias observadas y las estimadas en k clases por la función de densidad de probabilidad sigue una función de distribución χ^2



$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

$$p_i = F(x_i + \Delta x) - F(x_i)$$

ES o no ES? => BONDAD DEL AJUSTE

Test χ^2

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

Número de classes ***k***:

- Al menos 5
- Regla de Sturges: $k = 1 + 3.3\text{Log}(N)$
- Ideal: classes equiprobables ($Np_i = \text{constante}$)

ES o no ES? $\Rightarrow$ BONDAD DEL AJUSTE

Test χ^2

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

Número de classes k :

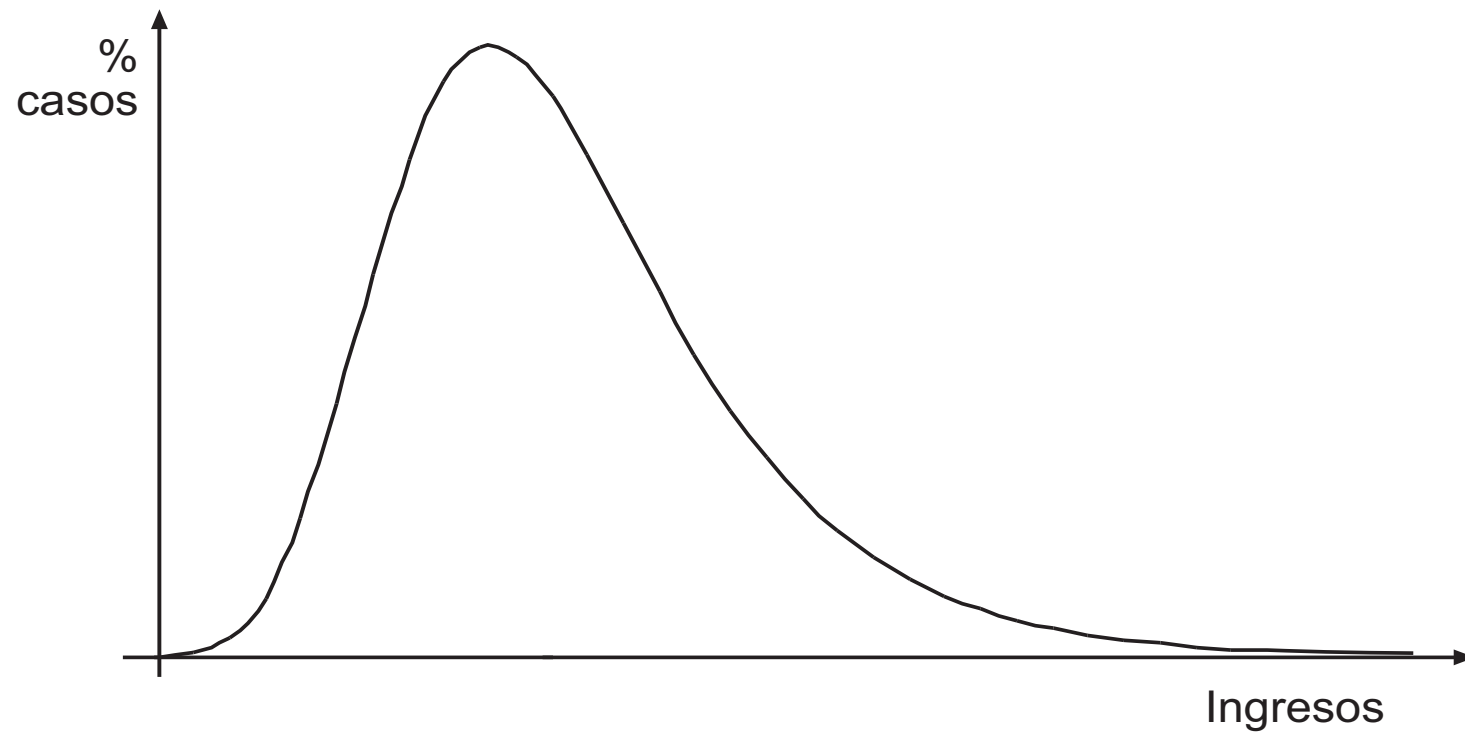
- Al menos 5
- Regla de Sturges: $k = 1 + 3.3 \text{Log}(N)$
- Ideal: classes equiprobables ($Np_i = \text{constante}$)

D sigue una distribución χ^2 de γ grados de libertad

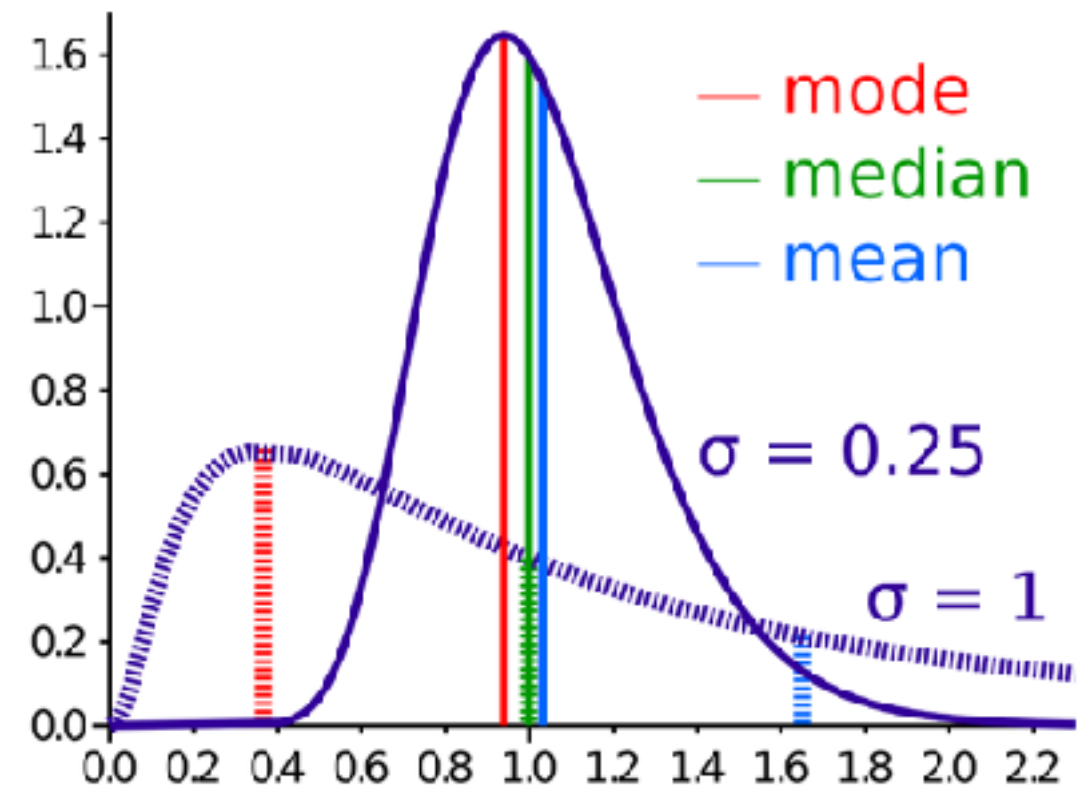
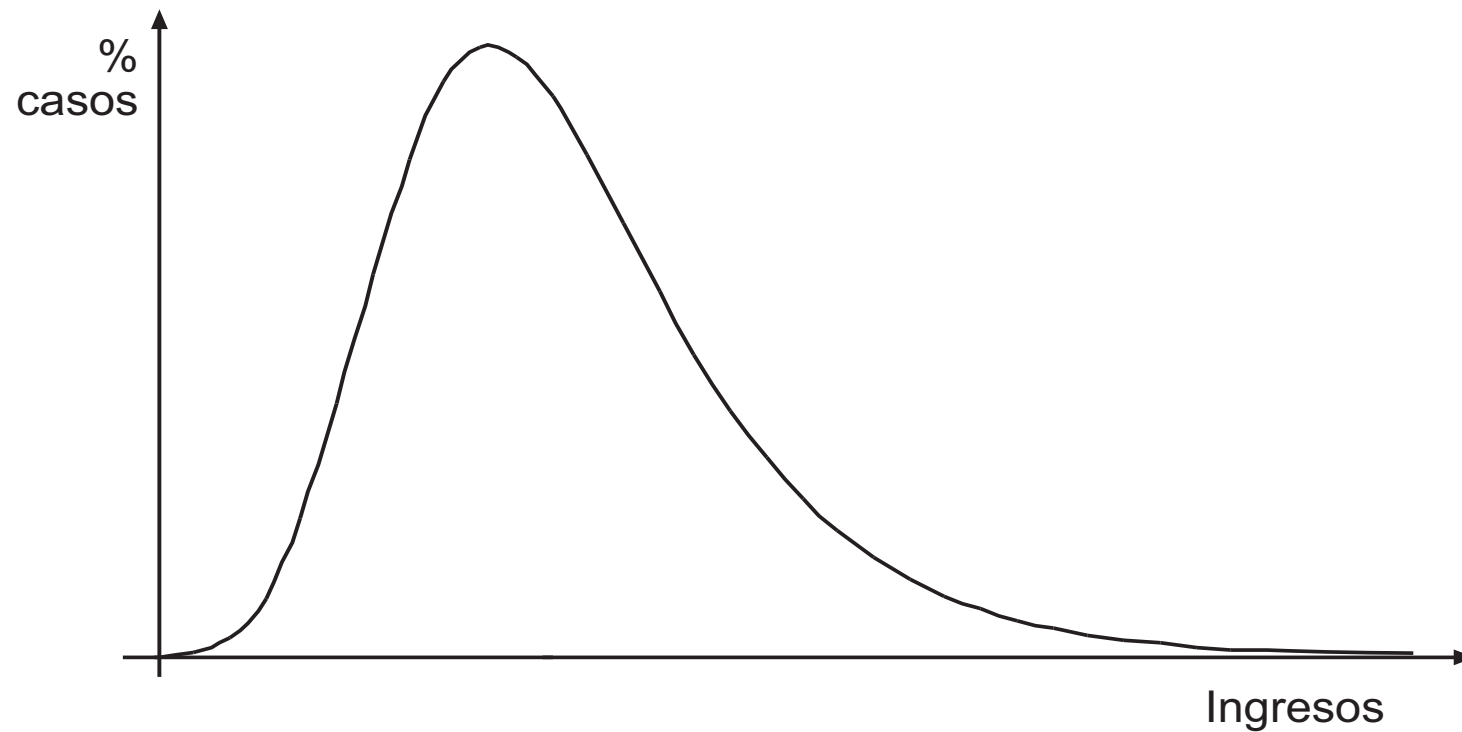
$$\gamma = k - 1 - m$$

m número de parámetros para ajustar $F(x)$ a la muestra

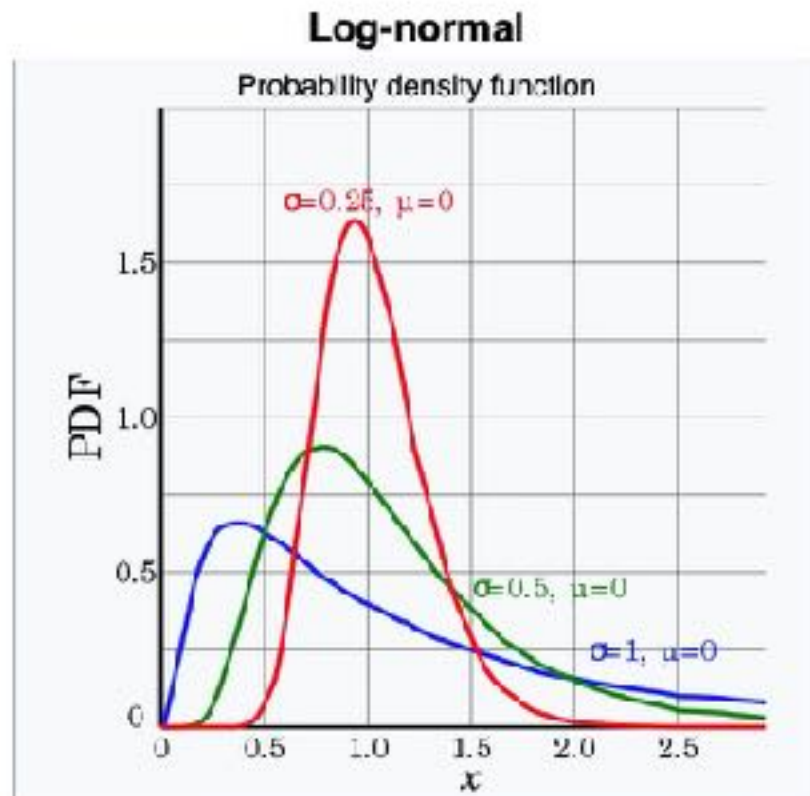
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICAS (NO GAUSSIANES)



FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICAS (NO GAUSSIANES)

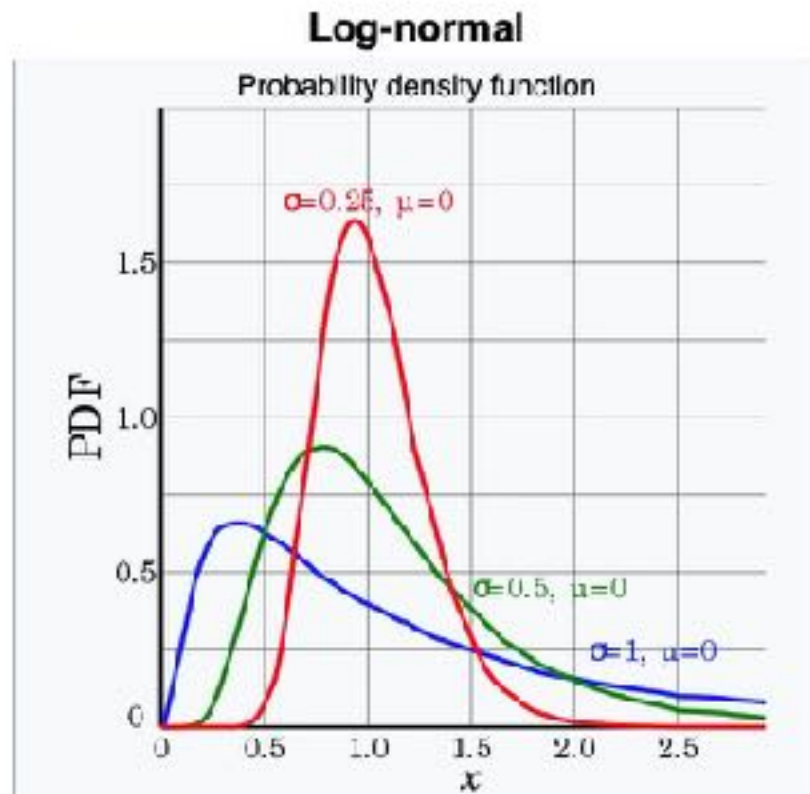


FUNCIÓNS DE DISTRIBUCIÓ LOGNORMAL



Normalment es prova una transformació matemàtica de la variable per fer-la asimètrica i propera a una distribució Normal

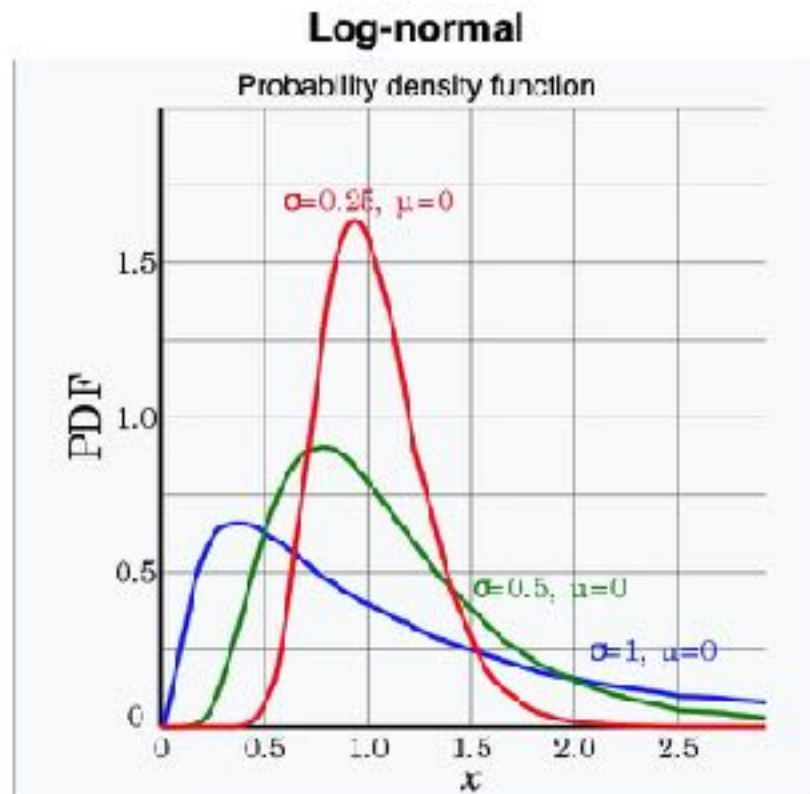
FUNCIÓNS DE DISTRIBUCIÓ LOGNORMAL



Normalment es prova una transformació matemàtica de la variable per fer-la asimètrica i propera a una distribució Normal

- LOGARITMES
- ARREL QUADRADA

FUNCIÓNS DE DISTRIBUCIÓ LOGNORMAL



Normalment es prova una transformació matemàtica de la variable per fer-la asimètrica i propera a una distribució Normal

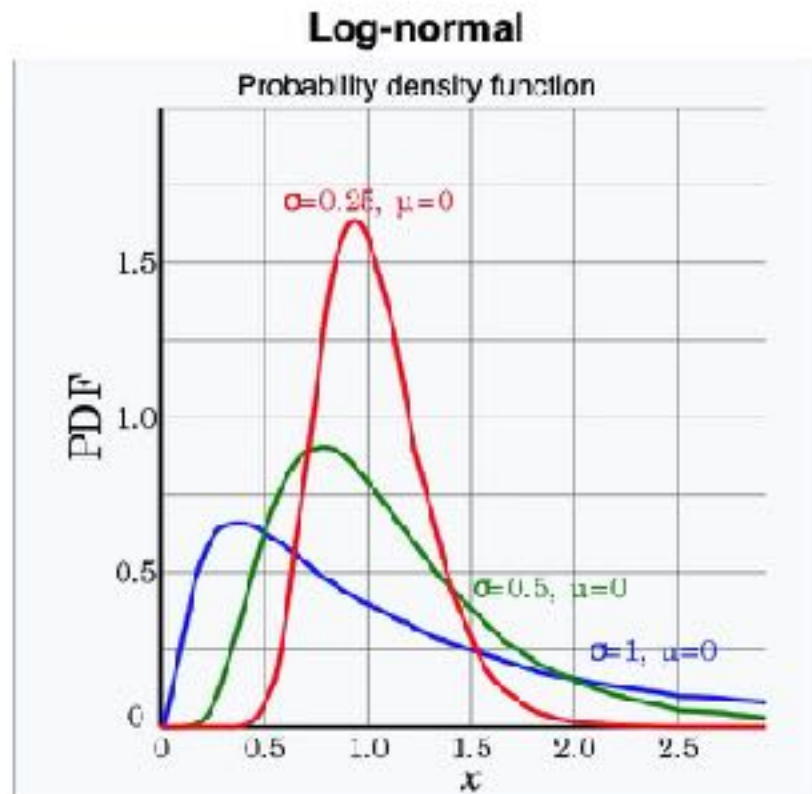
- LOGARITMES
- ARREL QUADRADA

La variable d'estudi **X** serà **LOGNORMAL**
Si la variable transformada **$Y = \ln(X)$** **ES NORMAL**

$$X \Rightarrow Y = \ln(X) \Rightarrow \mu_Y; \sigma_Y$$

$\Rightarrow$ ANALISI GRAFICA distribució Gauss de Y

FUNCIÓNS DE DISTRIBUCIÓ LOGNORMAL



Normalment es prova una transformació matemàtica de la variable per fer-la asimètrica i propera a una distribució Normal

- LOGARITMES
- ARREL QUADRADA

La variable d'estudi **X** serà **LOGNORMAL**
Si la variable transformada **$Y = \ln(X)$** ES NORMAL

$$X \Rightarrow Y = \ln(X) \Rightarrow \mu_Y; \sigma_Y$$

$\Rightarrow$ ANALISI GRAFICA distribució Gauss de Y

O ALTERNATIVAMENT

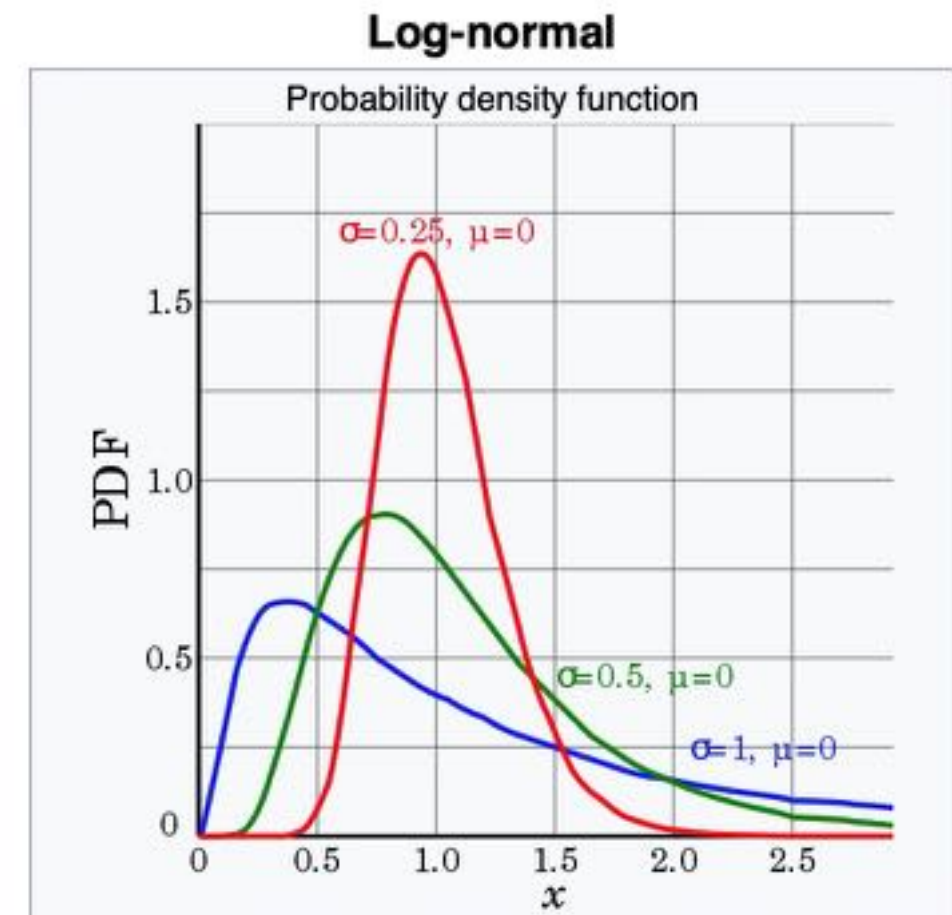
**$\Rightarrow$ ANALISI GRAFICA distribució Gauss de $\ln(X)$
(en un gràfic amb EIX d'ORDENADES LOGARITMIC)**

FUNCIÓ DE DISTRIBUCIÓ LOGNORMAL

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Función lognormal

La variable X sigue una distribución *lognormal* si $\ln X$ tiene una distribución normal de media μ y varianza σ^2 . En consecuencia, la variable



**La variable d'estudi X serà LOGNORMAL
SI la variable transformada $Y = \ln(X)$ ES NORMAL**

$$X = \exp [\mu_Y + \sigma_Y U]$$

X serà LOGNORMAL; U variable normal estandard,

Escala Gauss

Max Q

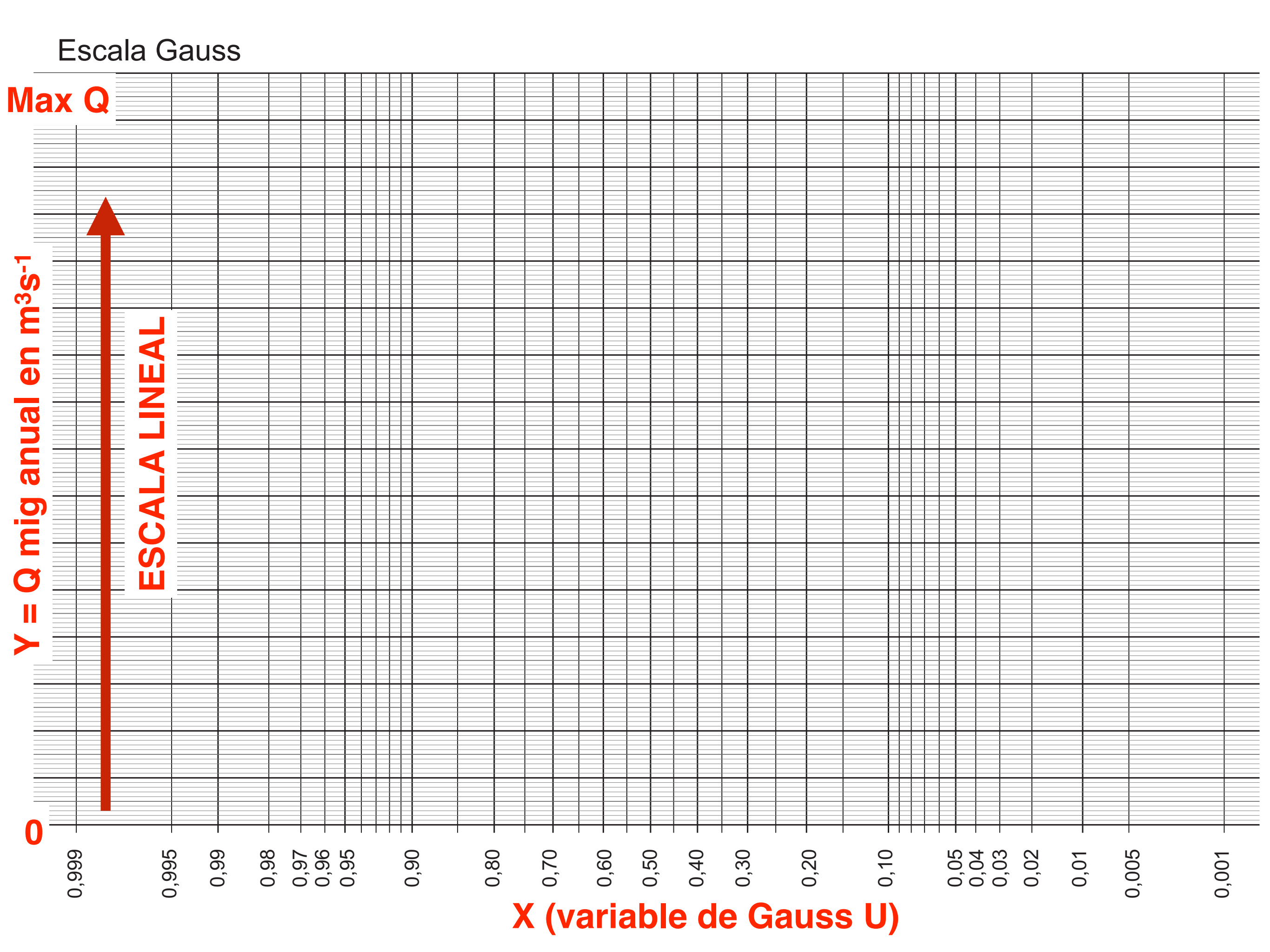
Y = Q mig anual en m³s⁻¹

ESCALA LINEAL

0

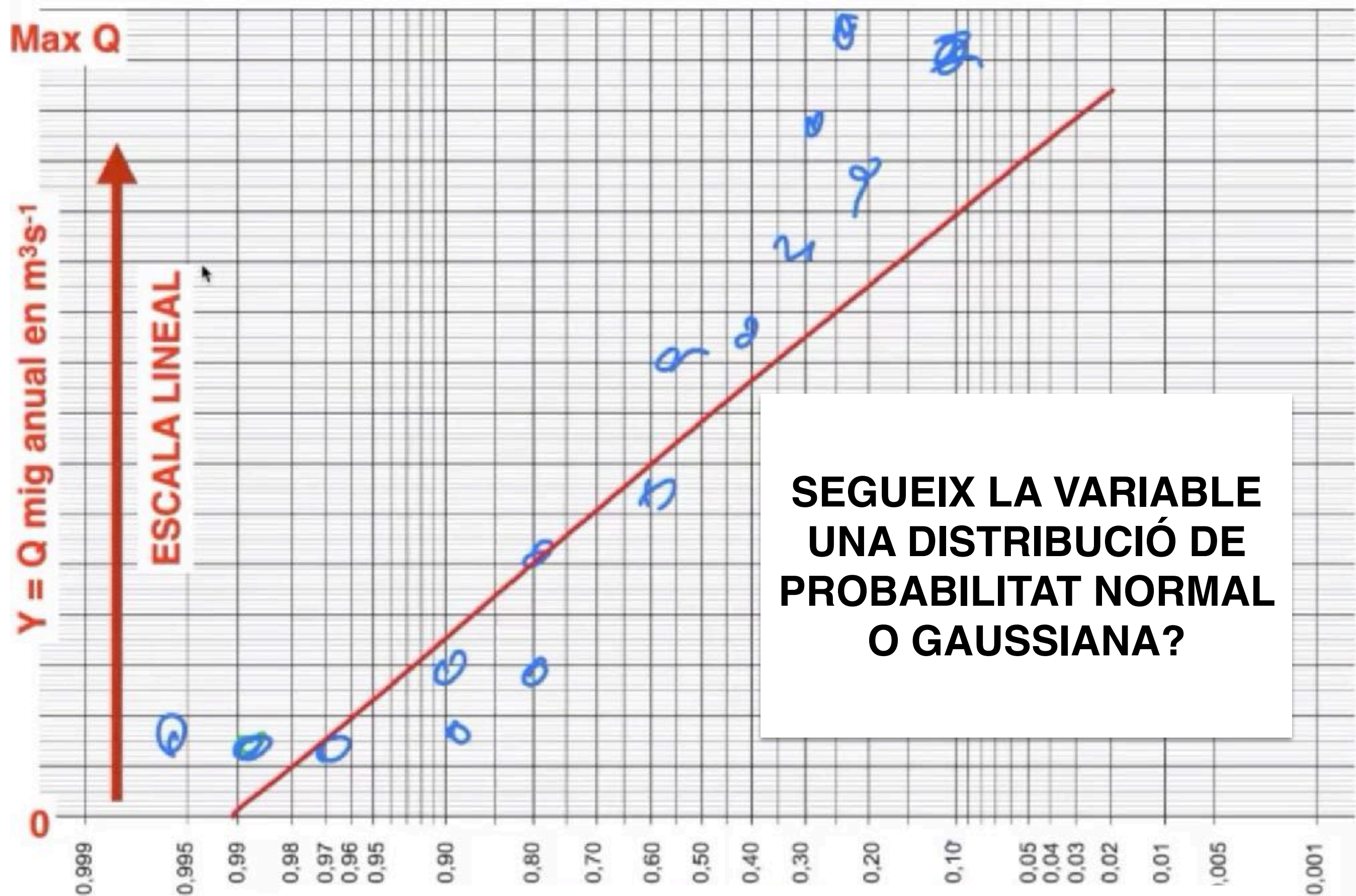
0,999
0,995
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,005
0,001

X (variable de Gauss U)



EN PAPER DE PROBABILITAT DE GAUSS

Escala Gauss



$P(X > x_i) = 1 - F(X)$ (o bien lineal en variable de Gauss U)

Posicio J

Q mig anual
(m3/s)
ordenats

1

1	5,17
2	8,46
3	8,75
4	10,52
5	10,68
6	11,28
7	14,32
8	14,7
9	15,08
10	15,59
11	16
12	16,29
13	16,45
14	16,51
15	16,7
16	17,02
17	17,17
18	17,46
19	17,46
20	17,59
21	18,35
22	19,17
23	19,81
24	20,22
25	20,38
26	20,63
27	21,74
28	21,86
29	22,09
30	22,4
31	22,47
32	22,66
33	25,41
34	26,97
35	27,09
36	27,85
37	28,74
38	29,85
39	30,74
40	31,56
41	31,91
42	32,92
43	36,57
44	37,55
45	41,83

Y=ln(X)
1,642872689
2,135349174
2,1690537
2,353278207
2,368372834
2,423031246
2,661657162
2,687847494
2,713369363
2,746629683
2,772588722
2,790551423
2,800325477
2,803966258
2,815408719
2,834389123
2,843163675
2,85991255
2,85991255
2,867330559
2,909629575
2,953346557
2,986186861
3,006672214
3,014554028
3,026746327
3,079153882
3,084658483
3,095125017
3,109060959
3,112181086
3,120601256
3,235142797
3,294725137
3,299164656
3,326832966
3,358289881
3,39618484
3,425564738
3,451890496
3,46291944
3,494080376
3,599228232
3,625673378
3,733613785

$$Fe = (J - 0,5) / N$$

Var norm
GAUSS

0,011111111	-2,286548
0,033333333	-1,8339146
0,055555556	-1,5932188
0,077777778	-1,4201791
0,1	-1,2815516
0,122222222	-1,1639496
0,144444444	-1,0605622
0,166666667	-0,9674216
0,188888889	-0,8819982
0,211111111	-0,8025719
0,233333333	-0,7279133
0,255555556	-0,6571086
0,277777778	-0,5894558
0,3	-0,5244005
0,322222222	-0,4614937
0,344444444	-0,4003634
0,366666667	-0,3406948
0,388888889	-0,2822161
0,411111111	-0,2246877
0,433333333	-0,167894
0,455555556	-0,1116372
0,477777778	-0,0557317
0,5	0
0,522222222	0,05573169
0,544444444	0,11163715
0,566666667	0,167894
0,588888889	0,22468772
0,611111111	0,28221615
0,633333333	0,34069483
0,655555556	0,40036338
0,677777778	0,46149369
0,7	0,52440051
0,722222222	0,5894558
0,744444444	0,65710857
0,766666667	0,72791329
0,788888889	0,80257189
0,811111111	0,88199821
0,833333333	0,96742157
0,855555556	1,06056224
0,877777778	1,16394958
0,9	1,28155157
0,922222222	1,42017907
0,944444444	1,59321882
0,966666667	1,83391464
0,988888889	2,28654795

**=DISTR.NORM.
ESTAND.INV(B2)**

N

Posicio J

Q mig anual
(m3/s)
ordenats

1

1	5,17
2	8,46
3	8,75
4	10,52
5	10,68
6	11,28
7	14,32
8	14,7
9	15,08
10	15,59
11	16
12	16,29
13	16,45
14	16,51
15	16,7
16	17,02
17	17,17
18	17,46
19	17,46
20	17,59
21	18,35
22	19,17
23	19,81
24	20,22
25	20,38
26	20,63
27	21,74
28	21,86
29	22,09
30	22,4
31	22,47
32	22,66
33	25,41
34	26,97
35	27,09
36	27,85
37	28,74
38	29,85
39	30,74
40	31,56
41	31,91
42	32,92
43	36,57
44	37,55
45	41,83

$Y = \ln(X)$

1,642872689

Y = Ln(Q)

2,368372834

2,423031246

2,661657162

2,687847494

2,713369363

2,746629683

2,772588722

2,790551423

2,800325477

2,803966258

2,815408719

2,834389123

2,843163675

2,85991255

2,85991255

2,867330559

2,909629575

2,953346557

2,986186861

3,006672214

3,014554028

3,026746327

3,079153882

3,084658483

3,095125017

3,109060959

3,112181086

3,120601256

3,235142797

3,294725137

3,299164656

3,326832966

3,358289881

3,39618484

3,425564738

3,451890496

3,46291944

3,494080376

3,599228232

3,625673378

3,733613785

$Fe = (J - 0,5) / N$

0,011111111

0,033333333

0,055555556

0,077777778

0,1

0,122222222

0,144444444

0,166666667

0,188888889

0,211111111

0,233333333

0,255555556

0,277777778

0,3

0,322222222

0,344444444

0,366666667

0,388888889

0,411111111

0,433333333

0,455555556

0,477777778

0,5

0,522222222

0,544444444

0,566666667

0,588888889

0,611111111

0,633333333

0,655555556

0,677777778

0,7

0,722222222

0,744444444

0,766666667

0,788888889

0,811111111

0,833333333

0,855555556

0,877777778

0,9

0,922222222

0,944444444

0,966666667

0,988888889

Var norm

GAUSS

-2,286548

-1,8339146

-1,5932188

X (variable de Gauss U)

-1,1055400

-1,0605622

-0,9674216

-0,8819982

-0,8025719

-0,7279133

-0,6571086

-0,5894558

-0,5244005

-0,4614937

-0,4003634

-0,3406948

-0,2822161

-0,2246877

-0,167894

-0,1116372

-0,0557317

0

0,05573169

0,11163715

0,167894

0,22468772

0,28221615

0,34069483

0,40036338

0,46149369

0,52440051

0,5894558

0,65710857

0,72791329

0,80257189

0,88199821

0,96742157

1,06056224

1,16394958

1,28155157

1,42017907

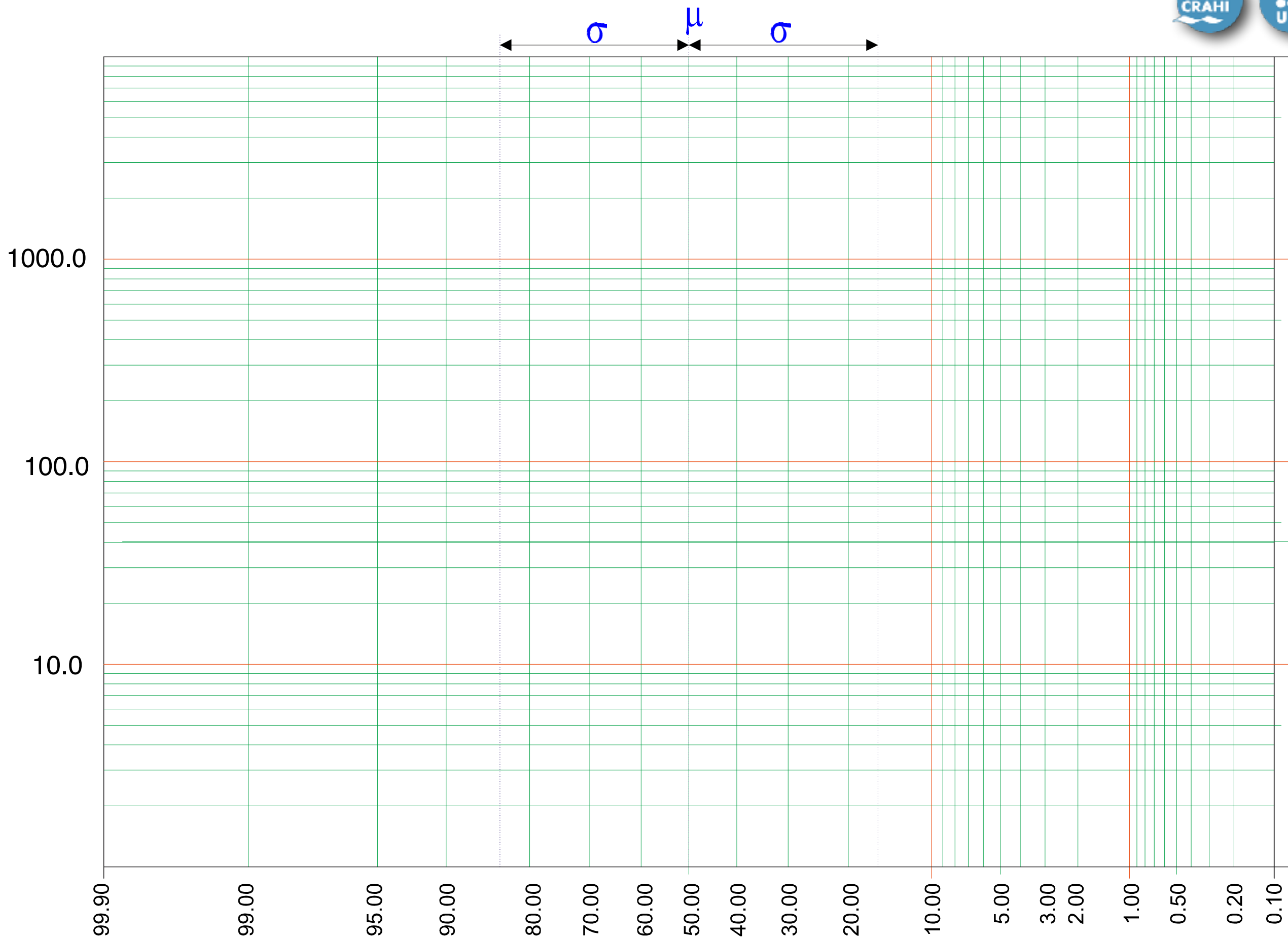
1,59321882

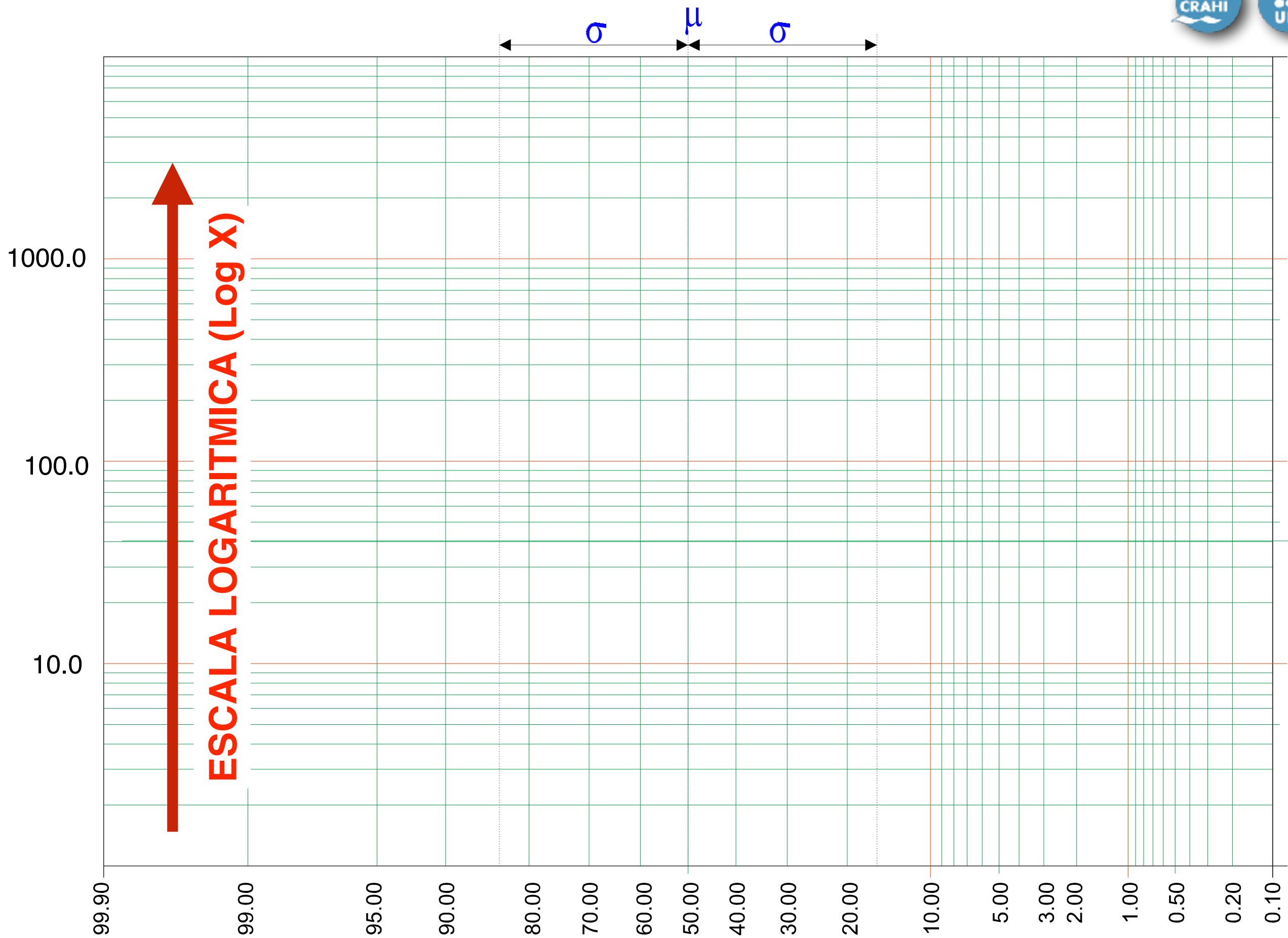
1,83391464

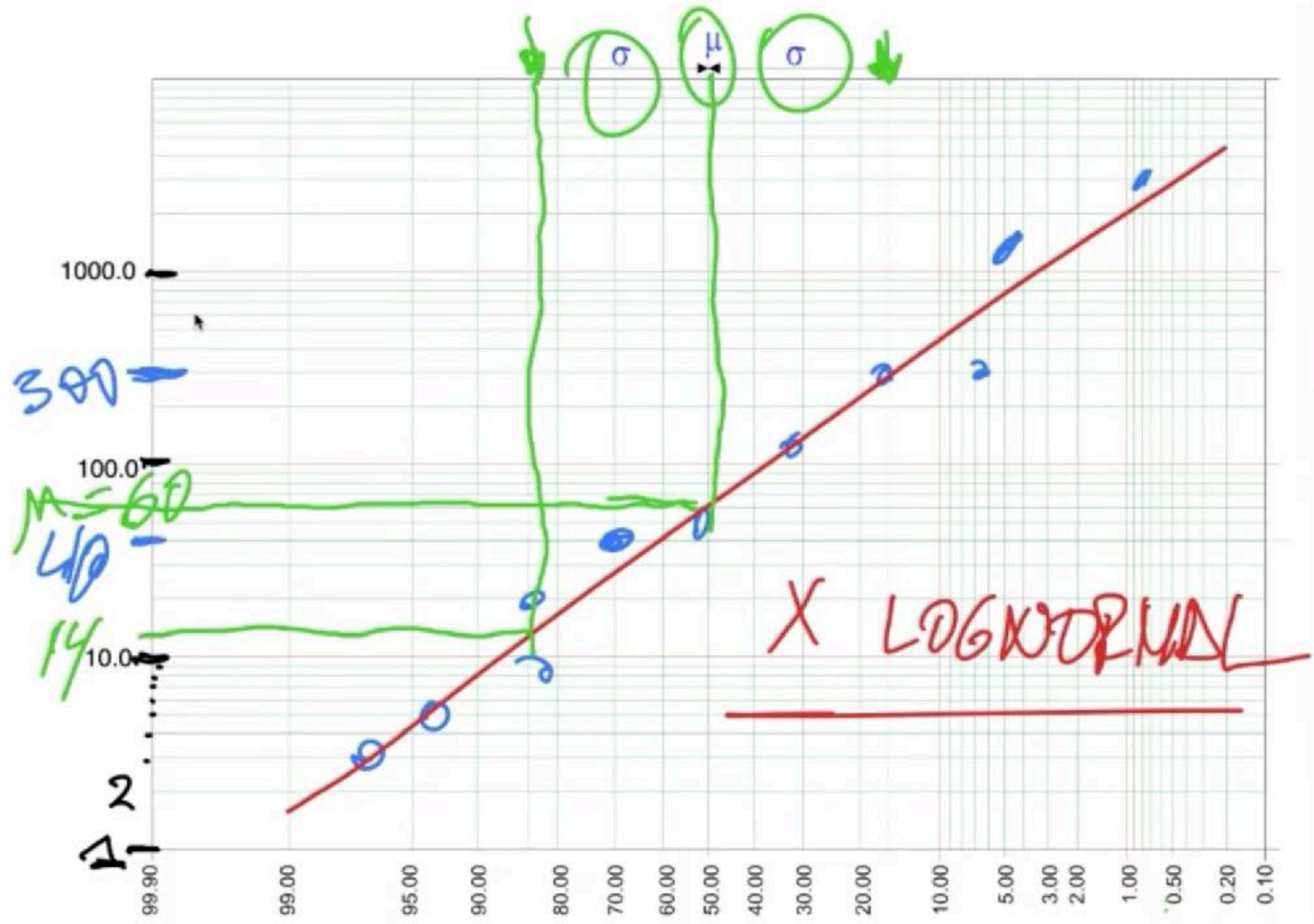
2,28654795

**=DISTR.NORM.
ESTAND.INV(B2)**

N

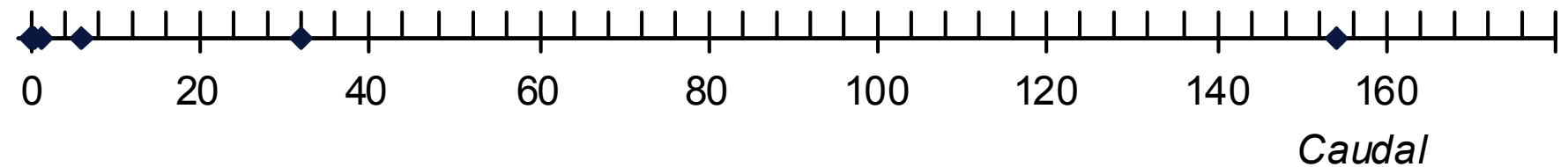






USO DE EJES LOGARÍTMICOS

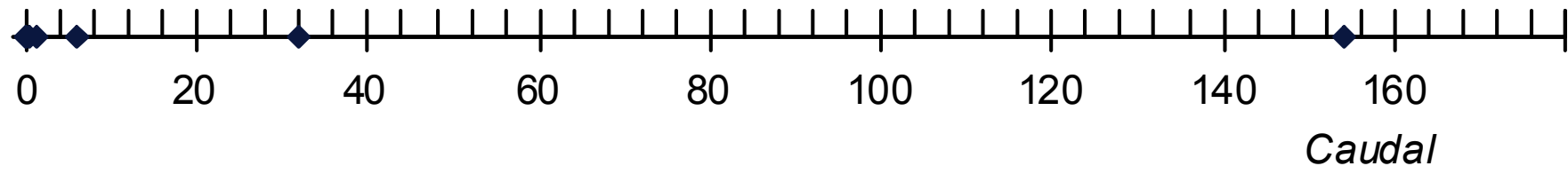
Caudal (m ³ /seg)
0,016
0,07
0,28
1,25
6,1
32
154



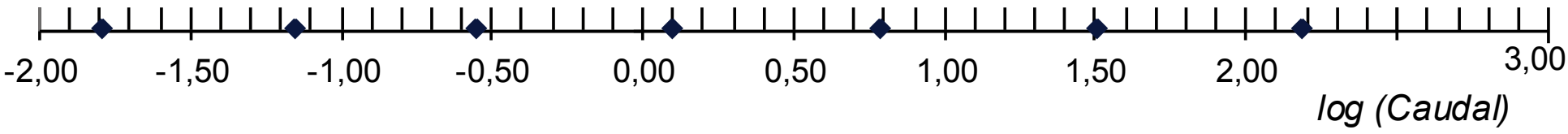
Si representamos los caudales de la tabla en una escala aritmética, los cuatro primeros no se distinguen

USO DE EJES LOGARÍTMICOS

Caudal (m ³ /seg)	log (Caudal)
0,016	-1,80
0,07	-1,15
0,28	-0,55
1,25	0,10
6,1	0,79
32	1,51
154	2,19

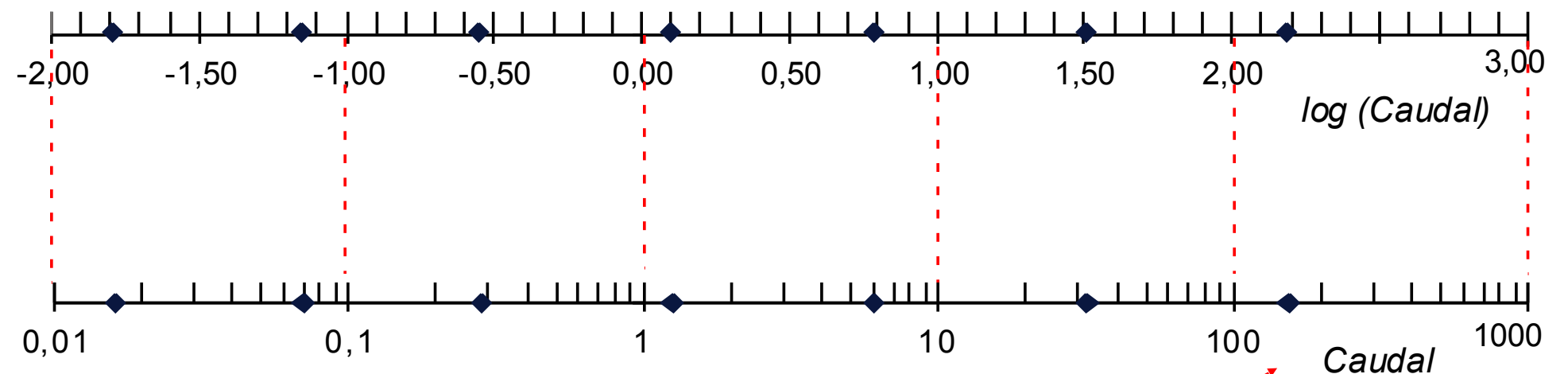
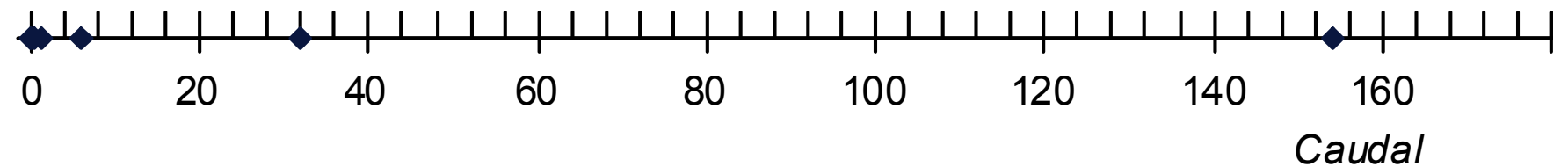


**Si calculamos
sus logaritmos y
los
representamos
con la escala
adecuada:**



USO DE EJES LOGARÍTMICOS

Caudal (m ³ /seg)	log (Caudal)
0,016	-1,80
0,07	-1,15
0,28	-0,55
1,25	0,10
6,1	0,79
32	1,51
154	2,19



Repetimos la escala de los logaritmos, pero rotulada con los valores (NO con los logaritmos): los puntos mantienen su posición relativa, pero el eje debe rotularse como *Caudal* (ya no como *log Caudal*):